



北京大学

# 本科生毕业论文

题目: 双星-极端质量比旋进的引力辐射

Gravitational radiation of b-EMRI systems

姓 名: \_\_\_\_\_ 阴煜程

学 号: \_\_\_\_\_ 2100011605

院 系: \_\_\_\_\_ 物理学院

本科专业: \_\_\_\_\_ 天文学

指导老师: \_\_\_\_\_ 陈弦 长聘副教授

二〇二五年五月

## 版权声明

任何收存和保管本论文各种版本的单位和个人，未经本论文作者同意，不得将本论文转借他人，亦不得随意复制、抄录、拍照或以任何方式传播。否则，引起有碍作者著作权之问题，将可能承担法律责任。



## 摘要

黑洞微扰论作为广义相对论的重要理论延伸，自 1957 年奠基已有 68 年的发展历史。对这一领域的研究不仅加深了人们对广义相对论和时空本质的理解，更为引力波探测提供了关键的理论支撑。特别值得指出的是，对于不同引力波源，如恒星级双黑洞并和后的铃宕 (ring-down) 波形与极端质量比旋进 (EMRI)，其波形都可以通过 Kerr 时空一阶微扰的 Teukolsky 方程进行计算。

最近的研究表明，吸积盘动力学过程可使恒星级双黑洞迁移至数倍于超大质量 Kerr 黑洞引力半径处，形成双星-极端质量比旋进 (b-EMRI) 系统。此类系统具有独特的双频引力波辐射特征：既保留 EMRI 系统的低频信号，又叠加了恒星级双黑洞本身产生的高频引力波信号。更值得关注的是，双黑洞在超大质量黑洞附近的强引力场中会表现出十分丰富的相对论性三体动力学现象，且有研究表明双黑洞可以作为“音叉”，共振激发起超大质量黑洞的准正则模。这些复杂特性使得 b-EMRI 成为多波段引力波天文学的重要研究对象，并被正式列入空间引力波探测 LISA 计划的关键目标波源。尽管多个天体物理模型预测了 b-EMRI 系统的存在，但由于其复杂的三体动力学和强相对论效应，这类系统的精确波形建模仍面临重大挑战。

为构建 b-EMRI 系统的精确波形模版，本文首先系统性梳理了黑洞微扰论的理论框架：回顾了 Regge-Wheeler-Zerilli 方程，Newman-Prenrose 标架，Teukolsky 方程，Chandrasekhar 变换与 Sasaki-Nakamura 变换以及准正则模理论等在 EMRI 波形计算中十分重要的理论成果，并对它们之间的深刻关系展开了详细的讨论，以助于我们更好地理解 and 运用这些理论。继而，基于 Kerr 时空测地线解析解，完整重构了 EMRI 波形计算框架，包括：静态无演化波形快照 (waveform snapshot) 的计算方法、辐射驱动轨道演化下的波形计算，为构建 b-EMRI 系统的波形奠定数值计算的基础。

随后，本文利用 b-EMRI 系统的层级式特点，将双黑洞的内轨道的运动通过一系列坐标变换转化为超大质量黑洞时空的全局轨道运动。这一转化使我们能够运用黑洞微扰论同时计算：(1) 其作为 EMRI 产生的低频引力波；(2) 双黑洞内轨道与背景时空耦合产生的高频引力波。当双黑洞的间距趋近于零时，我们的计算自然地退化为标准 adiabatic 近似下的 EMRI 波形。特别地，我们发现当双黑洞内轨道频率与超大质量黑洞准正则模频率匹配时，由耦合模式产生的引力辐射将被极大地增强，这一点前人工作中发现的“恒星级双黑洞可以共振激发超大质量黑洞准正则模”的论断。这些丰富的信息会影响 b-EMRI 系统的波形和轨道演化，使得它与标准的 EMRI 波形产生显著的区别，能够在引力波数据处理中被识别出来。

最后，本文还探讨了 b-EMRI 工作的两个后续进展：(1) b-EMRI 在远场或即将落入超大质量黑洞时的波形计算困难，以及随着产生的对 Sasaki-Nakamura 方程的应用拓展；(2) 恒星级双黑洞自身辐射的引力波被超大质量 Kerr 黑洞散射的问题。这些理论进展不仅深化了我们对 b-EMRI 系统辐射机制的理解，更提升了 b-EMRI 作为多波段引力波源的研究价值。

**关键词：黑洞微扰论；极端质量比旋进；相对论性三体问题；引力波波形建模**

## Abstract

Black hole perturbation theory (BHPT), as a pivotal theoretical extension of general relativity, has evolved for 68 years since its inception in 1957. Research in this field has not only deepened our understanding of the essence of spacetime but also provided critical theoretical foundations for gravitational wave detection. Notably, the Teukolsky equation - the first-order perturbation equation of Kerr spacetime - serves as a powerful tool for modeling gravitational waveforms from diverse sources, including the ringdown signals of stellar-mass binary black hole (BBH) mergers and the radiation of extreme-mass-ratio inspiral (EMRI) systems.

Recent astrophysical studies reveal that accretion disk dynamics can drive stellar-mass BBHs to regions within a few gravitational radii of a Kerr supermassive black hole (SMBH), forming the so-called binary extreme-mass-ratio inspiral (b-EMRI) systems. These systems exhibit distinctive dual-frequency gravitational wave signatures: low-frequency due to its EMRI nature and high-frequency components from the binary's inner orbital motion. Of particular significance are their rich relativistic three-body dynamics in strong-field regimes. Previous study also shows that the small binary can act as a "tuning fork" that resonantly excites the quasi-normal modes (QNMs) of the SMBH, while nonlinear interactions between orbital parameters and radiation reaction further complicate the dynamics. These features makes b-EMRIs a very important multi-band gravitational wave source, which has been formally incorporated into the targets of Laser Interferometer Space Antenna (LISA). Although predicted by several astrophysical models, b-EMRIs pose a challenge in waveform modeling due to their complex three-body dynamics and strong relativistic effect.

To construct a comprehensive waveform model for b-EMRIs, we need a deep understanding of the theories behind the phenomena. Therefore, we systematically studied the theoretical framework of BHPT including the Regge-Wheeler-Zerilli equation, Newman-Penrose tetrad, Teukolsky equation, and their transformations (Chandrasekhar and Sasaki-Nakamura transformations). Built on analytical solutions of the timelike Kerr geodesics, we review the EMRI waveform computation method including non-evolving waveform snapshots and radiation-driven adiabatic waveforms, thereby laying the numerical foundation for b-EMRI waveform modeling.

Taking advantage of the hierarchical nature of b-EMRIs, we perform a series of coordinate transformations to map the inner orbital dynamics in its free-fall frame onto the global spacetime of the Kerr

SMBH in Boyer-Lindquist coordinates. This allows us to use BHPT to calculate the two gravitational wave components: (1) low-frequency radiation due to its EMRI nature and (2) high-frequency modulated signals generated by the inner motion of the small binary. When the inner binary's separation vanishes, our calculation recovers the standard relativistic adiabatic EMRI waveform. Furthermore, by including the high-frequency perturbation, we find a correction to the waveform as large as the adiabatic order when the frequency matches the QNMs of the SMBH, therefore supporting the earlier proof-of-concept study claiming that the small BBH can resonantly excite the QNMs of the SMBH. These incredible features enable us to distinguish b-EMRI from standard EMRI waveforms, providing critical identifiers for gravitational wave data analysis.

Finally, we introduce two key extensions of the b-EMRI problem: (1) waveform computation challenges in the near-horizon regime and far-field regime, resolved through transferring to the Sasaki-Nakamura formalism, and (2) scattering of the small binary's own gravitational waves by the Kerr SMBH. These advancements not only deepen our understanding of b-EMRI radiation mechanisms but also enhance the value of b-EMRI itself as a multi-band gravitational wave source.

**Key Words: Black hole perturbation theory; extreme-mass-ratio inspiral; relativistic three-body problem; gravitational waveform modeling**

# 全文目录

摘要	1
Abstract	3
全文目录	5
第一章 引言	9
1. 引力波领域近期发展概况	9
2. 极端质量比旋进 (EMRI)	10
3. 双星-极端质量比旋进 (b-EMRI)	11
3.1 动力学成因	11
3.2 研究现状及挑战	12
3.3 本文的 b-EMRI 模型介绍	13
4. 本文的结构	14
第二章 黑洞微扰论简介	15
1. 历史回顾	15
2. Regge-Wheeler-Zerilli 形式	19
2.1 Regge-Wheeler-Zerilli 方程	19
2.2 类薛定谔方程的渐进解	21
2.3 Regge-Wheeler-Zerilli 方程的数值解法	21
3. Newman-Penrose 形式	23
3.1 Lie 括号和 Lie 微分	23
3.2 一般标架 (tetrad) 理论	26
3.3 Newman-Penrose 标架	30
4. Teukolsky 方程	39
4.1 Kerr 时空中的 Kinnersley 标架	39
4.2 Teukolsky 方程的推导	43
4.3 Teukolsky 方程的解法	45
5. Chandrasekhar 变换与 Sasaki-Nakamura 变换	56
5.1 RWZ 方程的 Chandrasekhar 变换	56
5.2 Teukolsky 方程的 Sasaki-Nakamura 变换	58
6. 黑洞的 Quasi-Normal Mode	61
6.1 QNM 的物理诠释	61
6.2 Schwarzschild 黑洞 QNM 频率的计算	62
第三章 EMRI 的波形计算	67
1. Kerr 时空中有质量粒子的动力学	67
1.1 守恒量与测地线方程	67

1.2	束缚态轨道的解析解 . . . . .	69
1.3	结果示例 . . . . .	82
2.	无演化的波形计算: 非齐次 Teukolsky 方程的 Green 函数法 . . . . .	84
2.1	非齐次 Teukolsky 径向方程的推导 . . . . .	84
2.2	Green 函数法 . . . . .	85
2.3	Teukolsky 方程源函数 $\mathcal{T}_{lm\omega}$ 的构造 . . . . .	90
2.4	波形快照 (waveform snapshot) . . . . .	94
3.	有演化的波形计算: Self-force 理论与 adiabatic 近似 . . . . .	98
3.1	Self-Force 理论与双时标展开 . . . . .	98
3.2	Adiabatic 近似与密切 (qiē) 测地线 . . . . .	107
<b>第四章</b>	<b>b-EMRI 的波形计算 . . . . .</b>	<b>117</b>
1.	相对论性三体动力学与坐标变换 . . . . .	117
1.1	b-EMRI 模型参数与外轨道设定 . . . . .	117
1.2	BL 坐标下的小黑洞轨迹 . . . . .	119
1.3	坐标变换与轨迹系数的推导 . . . . .	122
2.	Teukolsky 源的展开 . . . . .	132
3.	波形展开与数值设定 . . . . .	139
3.1	波形展开 . . . . .	139
3.2	数值计算的设定 . . . . .	141
<b>第五章</b>	<b>结果展示与讨论 . . . . .</b>	<b>143</b>
1.	结果 . . . . .	143
1.1	超大质量黑洞 QNM 的激发 . . . . .	143
1.2	b-EMRI 波形可视化 . . . . .	145
2.	讨论 . . . . .	149
2.1	与现有模型的对比 . . . . .	149
2.2	b-EMRI 的潮汐稳定性与参数空间 . . . . .	150
2.3	本工作中 b-EMRI 模型的有效性 . . . . .	151
3.	结论 . . . . .	153
<b>第六章</b>	<b>后续进展 . . . . .</b>	<b>155</b>
1.	Sasaki-Nakamura 形式的应用 . . . . .	155
1.1	Teukolsky 方程 Green 函数的发散与正规化方案 . . . . .	155
1.2	非齐次 Sasaki-Nakamura 方程的解法 . . . . .	158
2.	Kerr 黑洞对引力波的散射 . . . . .	164
2.1	分波法下的引力波散射问题 . . . . .	164
2.2	稳相近似法 . . . . .	177
<b>第七章</b>	<b>总结 . . . . .</b>	<b>181</b>
1.	全文总结 . . . . .	181

---

2. 本文的定位 . . . . .	182
参考文献 . . . . .	184
致谢 . . . . .	199
北京大学学位论文原创性声明和使用授权说明 . . . . .	201



# 第一章 引言

## 1. 引力波领域近期发展概况

自 1915 年 Einstein 提出广义相对论 (General Relativity, GR) 以来 [1], 人类对这一理论的探索从未停止。1919 年, 由 Eddington 所组织的对日食期间太阳引力导致周围光路偏转的观测结果, 在误差范围内完全符合广义相对论的预言 [2], 这使得广义相对论逐渐开始被人们接受。引力波 (Gravitational Wave, GW) 是广义相对论的另一个直接预言, 它是物质加速运动所产生的时空扰动, 因此也被形象地称为时空涟漪<sup>1</sup>。

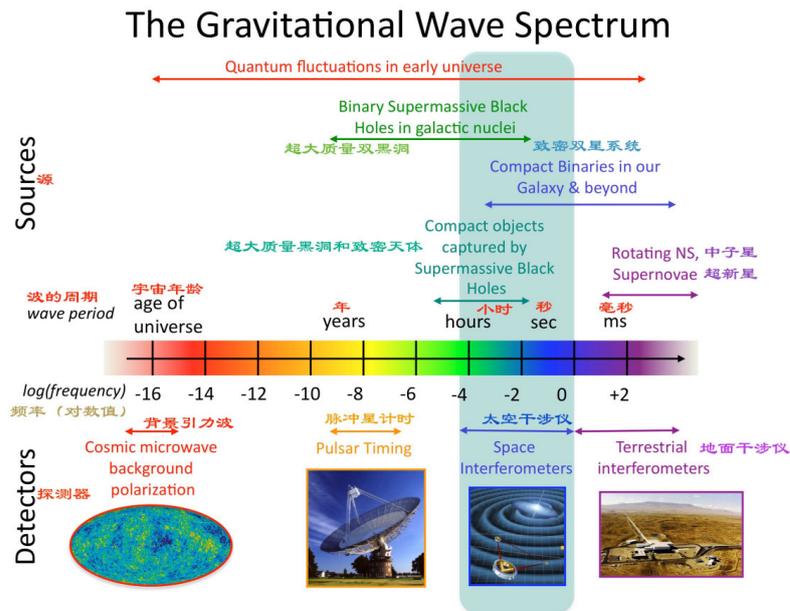


图 1.1 引力波谱及对应的波源与观测方式

2015 年 9 月 14 日, 在广义相对论提出的 100 年后, 位于美国的激光干涉引力波天文台 (Laser Interferometer Gravitational wave Observatory, LIGO [4,5]) 首次直接观测到了双黑洞并合事件产生的引力波信号 [6,7]。过去十年间, 引力波探测方面的突破性进展不仅推动了致密天体物理、相对论天体力学等领域的理论革新, 更孕育出多信使天文学框架下的引力波天文学, 其学科体系已涵盖数值相对论模拟、引力波源建模、引力波数据分析、电磁对应体协同

<sup>1</sup>对引力波领域的前期发展和历史感兴趣的读者可以参考 [3]。

观测等多元化的研究方向。

地基引力波探测的突破性成果为空间探测奠定了基础,促进了以激光干涉空间天线(Laser Interferometer Space Antenna, LISA) [8,9] 为代表的空间引力波探测计划的发展。由欧盟主导的 LISA 计划与中国的“太极” [10]、“天琴” [11,12] 协同发展,均计划于 2030 年代完成在轨部署并开展科学观测。不同于地基观测的  $10 - 10^3\text{Hz}$  频段和脉冲星计时阵列 (Pulsar Timing Array, PTA [13–16]) 的纳赫兹频段,空间引力波探测将实现对  $10^{-4} - 10^{-1}\text{Hz}$  频段的观测,填补引力波频谱中的关键空缺 (见图 1.1),为研究大质量双黑洞 ( $M \sim 10^6 M_\odot$ ) 并合、极端质量比旋进 (Extreme-Mass-Ratio Inspiral, EMRI [17,18])、银河系内双白矮星及随机引力波背景提供全新观测窗口。

## 2. 极端质量比旋进 (EMRI)

在上述引力波源中,EMRI 由于其信号的复杂性和包含物理信息的多样性,被认为是空间引力波探测中检验引力理论的“黄金探针”。它由一个恒星级黑洞环绕超大质量黑洞 (SuperMassive Black Hole, SMBH) 所构成。其复杂的动力学效应构建的 17 维参数空间 [19],为验证克尔 (Kerr) 度规提供了精密检验平台 (见图1.2)。通过监测小黑洞落入超大质量黑洞前约  $1/\varepsilon$  个周期 ( $\varepsilon \sim 10^{-6} - 10^{-4}$  为质量比) 引力波相位的变化,我们能够精确追踪在这一时段内小黑洞轨道随引力辐射的演化。在这一过程中,任何微小的动力学扰动 (如气体摩擦或暗物质晕引起的环境效应) 或时空度规对 Kerr 解的偏离都会被放大  $10^4 - 10^6$  倍,并最终编码在引力波的相位演化中。为了在未来的探测中成功识别 EMRI 信号并精确区分不同物理效应的影响,必须发展高精度的 EMRI 波形模板库。

在过去的三十年间,EMRI 波形计算研究取得了显著进展。就超大质量黑洞及其周围的动力学而言,研究已从最初的史瓦西 (Schwarzschild) 时空拓展至更符合实际的 Kerr 时空;轨道计算从简单的赤道面圆轨道 ( $e = 0, \iota = 0$ ) 发展到包含椭圆轨道 ( $e \neq 0$ ) 和倾斜轨道 ( $\iota \neq 0$ ) 的更普遍情形;演化模型也从静态轨道逐步完善,先后纳入了一阶引力自力 (Gravitational Self-Force, GSF) 效应和更精确的二阶 GSF 修正 [19,22–32]。在小黑洞建模方面,研究已从最初的 Schwarzschild 黑洞 (无自旋) 拓展至更普遍的 Kerr 黑洞 (含自旋),其引入的修正效应在量级上与二阶 GSF 相当 [33–48]。

然而,在数据处理过程中,我们需要在有限时间内生成数以千万计的波形模板,因此计算效率成为衡量模板质量的关键指标之一。随着更多高阶效应被纳入模型,数值模拟所需的计算资源和时间显著增加。对比表明,某些引入的高阶效应带来的修正量已经小于环境效应造成的影响,这促使部分研究者将重心转向各类环境效应对 EMRI 波形的调制作用 [49,50]。

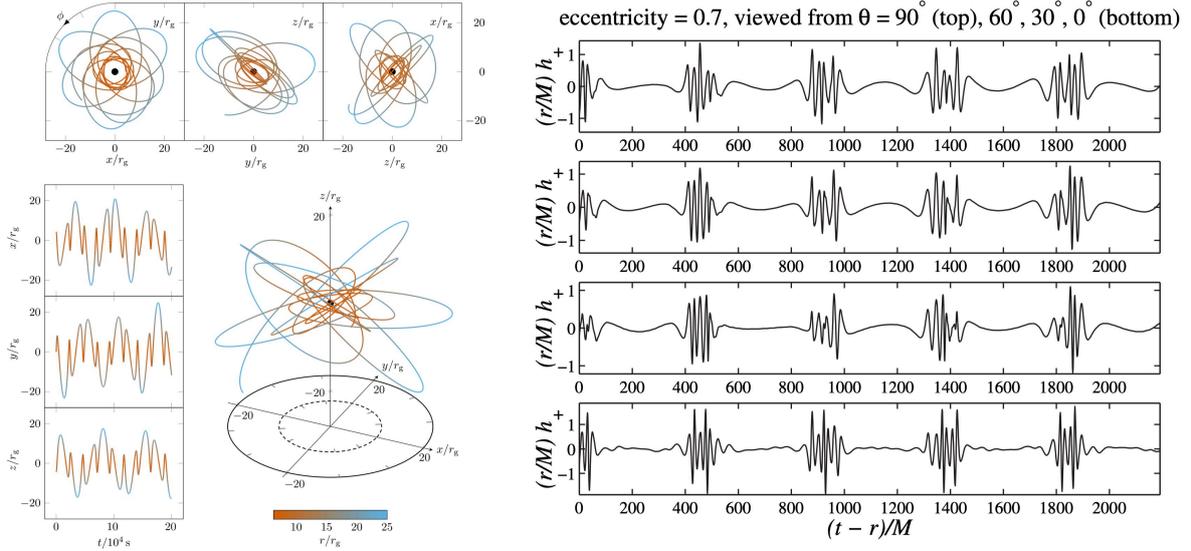


图 1.2 EMRI 系统示意图。左图出自 Berry et al., 2019 [20], 展示了 EMRI 系统中黑洞轨道的复杂性; 右图出自 Drasco & Hughes, 2006 [21], 展示一个典型 EMRI 波形的特征。

### 3. 双星-极端质量比旋进 (b-EMRI)

#### 3.1 动力学成因

对超大质量黑洞周围动力学过程的最新研究表明, EMRI 系统中的环绕天体可能并非单一小黑洞, 而是一个双黑洞 (Binary Black Hole, BBH) 系统, 如图1.3。这类双黑洞可能通过以下两种机制被超大质量黑洞俘获: 1) 近距离潮汐相互作用 [51, 52]; 或 2) 当超大质量黑洞位于活动星系核 (Active Galactic Nucleus, AGN) 内时 [49, 53–55], 通过吸积盘输运至超大质量黑洞附近。在这个层级式三黑洞 (hierarchical triple) 系统中, 恒星级双黑洞通常被称为“内轨道双星” (Inner Binary, IB), 而由内双星与 SMBH 组成的系统则称为“外轨道双星” (Outer Binary, OB)。由于该双黑洞系统正螺旋坠入超大质量, 整个系统现被称为“双星-极端质量比旋进”(binary-EMRI, 简称 b-EMRI) [52, 56]。

尽管目前尚缺乏确凿的观测证据支持 b-EMRI 的存在, 但有研究指出, LIGO 和 Virgo 探测器在第三次观测运行中发现的 GW190521 事件 [57, 58], 可能源自超大质量黑洞附近的双黑洞并合。该事件涉及迄今探测到的最重双黑洞系统之一, 其最终质量约 150 倍太阳质量 ( $150M_{\odot}$ ), 远高于银河系 X 射线双星中发现的典型黑洞质量 [59, 60]。如此高的质量可以通过引力波信号在超大质量黑洞附近强引力场中产生的红移效应来解释 [61]。此外, 兹威基瞬变设施 (Zwicky Transient Facility, ZTF) 报告了可能的伴随活动星系核耀发 [62], 对该耀发的进一步分析表明 GW190521 可能来源于该活动星系核的吸积盘 [63]。

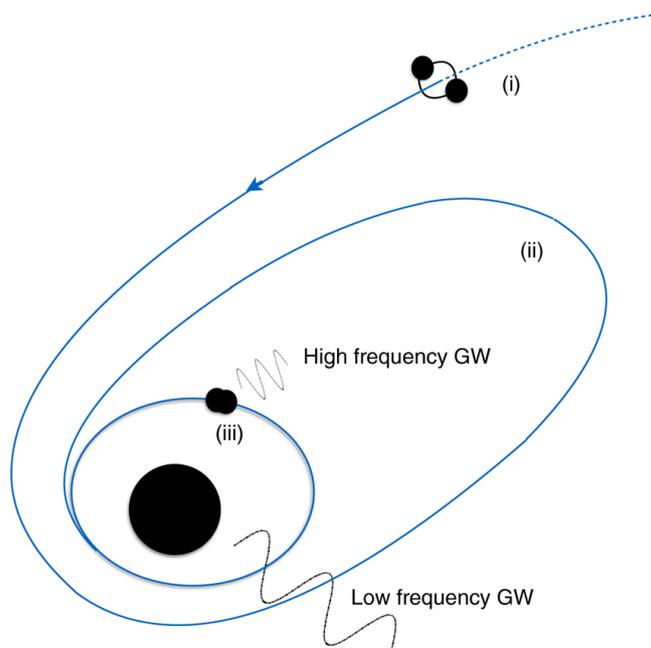


图 1.3 b-EMRI 系统示意图，图片出自 Chen & Han 2018 [52]

### 3.2 研究现状及挑战

在天体物理环境中形成 b-EMRI 的可能性，促使学界对这一特殊引力波源的波形开展了大量研究。现有研究方法主要可分为两类：

第一类方法以孤立恒星级双黑洞波形为基础，通过叠加相对论效应来考虑邻近超大质量黑洞的影响 [64]。目前已研究的效应包括：

1. 多普勒与引力红移效应 [65–70]；
2. 双黑洞高速运动导致的波形畸变 [71, 72]；
3. 超大质量黑洞引力透镜效应（几何光学近似 [69, 73] 与波动光学近似 [74]）。

然而，这些研究均未考虑外双星的引力辐射，即这个系统作为 EMRI 本身的信号。

第二类方法以标准 EMRI 系统为基础，将其中单个恒星级黑洞替换为双黑洞系统。其基本思路是将该双黑洞建模为两个相互绕转的质点，其质心再绕超大质量黑洞运动，并基于 Teukolsky 方程计算引力波形，如 Cardoso 2021 [75]。近期，Jiang 2024 [76] 采用另一种方法，将 b-EMRI 中的双黑洞视为具有自旋及其他有限尺寸效应的质量分布，评估了其波形与标准 EMRI 系统的可区分性。该方法基于 Mathisson-Papapetrou-Dixon (MPD) 形式 [77–82]——该体系已广泛应用于描述 EMRI 中小黑洞的自旋效应。若通过多极展开将两个绕转质点相对于参考世界线的能动量分布“骨架化”，则可更清晰地建立该方法与 MPD 形式的关联。该方

法的扩展版本已被用于研究“dirty-EMRI”系统（更一般性的环境效应）[50]。此外，Meng 2024 [83] 通过改进“Numerical Kludge”（NK）波形模板来模拟 b-EMRI 的引力波信号。

在 b-EMRI 波形建模中，仍存在两个未解决的问题：首先，现有研究将小黑洞的运动轨迹简单处理为内、外轨道代数叠加 [75, 83, 84]。这种处理虽直观，但在相对论性运动范畴并不成立。当考虑以下相对论效应时：1) 狭义相对论效应（如内双星高速运动）；2) 广义相对论效应（如时空弯曲），从内双星质心（**Center of Mass, CM**）参考系观测到的圆形内轨道，在无穷远观测者看来将发生畸变。因此，必须建立严格的坐标变换以完整计入上述相对论效应。

第二个问题在 Cardoso 2021 [75] 中已部分涉及——小双黑洞的内轨道运动可能产生与超大质量黑洞的准正则模（**Quasi-Normal Mode, QNM** [85]）频率相近的扰动。根据黑洞微扰论的预测，此时 IB 可共振激发超大质量黑洞的本征振动 [75]，但该效应要求对扰动源 IB 进行精确处理。例如，在 Jiang 2024 [76] 未观测到 QNM 的共振激发，因其忽略了扰动源的高频模态。该研究中恒星级双黑洞更接近并合阶段，其内轨道频率较高，可能超出 QNM 的激发范围。需将研究拓展至双黑洞距离较远的情形，才能有效识别 QNM 激发效应。

### 3.3 本文的 b-EMRI 模型介绍

近期关于 b-EMRI 的动力学模型在同时描述内双星与外双星演化方面取得重要进展 [86–89]。其核心方法是选择内双星质心自由落体坐标系（**Free Fall Frame, FFF**）进行计算。在该自由落体坐标系中，根据等效原理，双黑洞系统的演化主要受其自引力支配。通过从 FFF 到 Boyer-Lindquist (BL) 坐标系的变换 [90–92]，原则上可获得两个小黑洞绕超大质量黑洞的运动轨迹。我们可分离出由内双星运动产生的高频轨迹分量，并评估其对超大质量黑洞准正则模的激发效应。基于此框架，我们构建了相对论性 b-EMRI 波形模型。

标准 EMRI 模型采用多尺度（或双时标）展开方法 [48, 93–95]。在该框架下，波形精度由相位展开阶数决定。如 Hinderer & Flanagan 2008 [93] 中所示，平均波形相位在小质量比极限下具有如下展开式：

$$\phi = \varepsilon^{-1}\phi^{(0)} + \varepsilon^0\phi^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (1.1)$$

首项称为“adiabatic”阶，后续 n 阶修正项标记为“post-n-adiabatic” (nPA) 阶<sup>2</sup>。为简化讨论，

<sup>2</sup>当前学界对“adiabatic”存在多种译法：热力学领域多译为“绝热的”或“准静态的”；分析力学中的“adiabatic invariance”标准译名为“渐浸不变量”。在 EMRI 轨道演化语境下，传统译法“绝热近似” (adiabatic approximation) 及“后绝热” (post-adiabatic) 未能准确体现其物理本质——该术语实际描述的是轨道沿密切 (qiē) 测地线 (osculating geodesic) 的缓变演化特性，与双时标展开 (two-timescale expansion) 的数学框架严格对应。基于三点考量：1) 物理内涵精确性：“准静态”更贴合轨道参数缓慢演化的动力学特征；2) 术语一致性：避免与热力学“绝热过程”产生概念混淆；3) 学术严谨性：当前中文译名尚未形成统一标准。本文决定保留英文原词“adiabatic”及“post-adiabatic”，不作翻译处理。相关术语将统一标注为：OPA (adiabatic order)；nPA (nth post-adiabatic order)

本文暂不考虑轨道共振引入的  $\varepsilon^{-1/2}, \varepsilon^{1/2}$  等半整数阶修正。对于 EMRI 参数估计, 1PA 精度模型已能满足需求 [9, 95]。

本文建立的 b-EMRI 模型中, 区别于常规 EMRI 的特征相位项具有  $(d/M)^2\varepsilon^{-1}$  标度关系 ( $d$  为内双星轨道尺度)。对于内轨道, 我们使用牛顿引力近似 (这要求  $d$  足够大, 从而内轨道的相对论效应可以忽略), 同时要求内轨道不至于被超大质量黑洞潮汐瓦解 (这设置了  $d$  的上限)。综合考虑下, 在我们的 b-EMRI 模型中  $(d/M)^2 \approx \varepsilon$ , 这意味着双黑洞内轨道效应实际等效于 1PA 阶修正。然而, 我们发现当内双星轨道频率与超大质量黑洞准正则模频率共振时, b-EMRI 相位修正量可达  $\phi^{(0)}$ , 即 “adiabatic” 阶, 因此将对波形的相位产生显著的影响。

## 4. 本文的结构

在第二章中, 我将系统阐述 EMRI 及 b-EMRI 波形计算的理论基础——黑洞微扰论 (**Black Hole Perturbation Theory, BHPT**), 具体包括: 1) 黑洞微扰论的历史概况; 2) Schwarzschild 时空中的 Regge-Wheeler-Zerilli 形式体系; 3) Newman-Penrose 标架理论; 4) Kerr 时空下的 Teukolsky 方程; 5) Schwarzschild 时空的 Chandrasekhar 变换与 Kerr 时空的 Sasaki-Nakamura 变换; 6) 黑洞的准正则模理论。

在第三章中, 我们将详细论述 EMRI 波形的计算方法, 重点涵盖: 1) Kerr 时空中任意轨道 (generic orbit) 测地线方程的解析求解; 2) 静态波形快照 (waveform snapshot) 的计算方法; 3) 基于 Self-force 理论和 adiabatic 近似的演化波形计算方法。

在第四章中, 我们将正式开展 b-EMRI 波形建模研究, 主要内容包括: 1) 相对论性三体系统动力学与小黑洞轨迹求解; 2) 基于标准 EMRI 波形的 b-EMRI 特征修正; 3) 通过辐射反作用 (radiation back-reaction) 引入 adiabatic 近似下的轨道演化和数值计算的设定。

在第五章中, 我们将重点分析研究成果: 1) b-EMRI 波形特征可视化; 2) 超大质量黑洞 QNM 激发对波形的调制效应和对轨道演化的影响; 3) 与现有理论模型的对比分析; 4) 系统稳定性及模型有效性的评估。

在第六章中, 我们将展望后续研究方向: 1) Teukolsky 方程远场源发散问题的正规化及 Sasaki-Nakamura 形式的应用拓展; 2) Kerr 黑洞对引力波的散射。

在第七章中, 我们将总结全文, 并阐述前面每一章之间的联系与意义, 同时还会说明本人对这篇论文的个人定位。

除非特殊说明, 本文采取几何单位制  $G = c = 1$ 。

## 第二章 黑洞微扰论简介

本章内容主要出自本人在 2023-2024 年间学习黑洞微扰论时的笔记与组会讲稿的整理。

### 1. 历史回顾

在深入探讨黑洞微扰论之前,我们先考察一个更简单的案例。假设一个具有能量  $E$  的粒子被束缚在一维势场  $V(x)$  中。若该粒子在位置  $x_0$  处达到平衡,即满足  $F(x_0) = -\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=x_0} = 0$ , 则可通过判断  $\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} > 0$  来确定该平衡点的稳定性。从微扰的角度来看,我们对粒子能量施加微小扰动  $\delta E$ , 观察系统在此扰动下的演化行为: 若粒子在  $x_0$  附近作简谐振荡, 则称该系统在  $\delta E$  扰动下是稳定的。

回到我们的主题。在广义相对论框架下, 我们所微扰的对象是时空度规  $g_{\mu\nu}$  (metric perturbation), 扰动源记为  $\delta_{\text{perturber}}$ 。因此我们可以进行各种各样的泰勒展开, 下面是一些具体的例子:

- 后牛顿理论 (Post-Newtonian, PN): 基于闵可夫斯基时空, 按  $c^{-2}$  幂次展开
- 后闵可夫斯基理论 (Post-Minkowskian, PM): 基于闵可夫斯基时空, 按牛顿引力常数  $G$  的幂次展开
- Schwarzschild 微扰论 (Schwarzschild perturbation): 基于 Schwarzschild 时空, 按微扰质量  $\mu$  的幂次展开
- Kerr 微扰论 (Kerr perturbation): 基于 Kerr 时空, 按微扰质量  $\mu$  的幂次展开
- 宇宙学微扰论 (cosmic perturbation): 基于 FLRW 时空, 按密度涨落  $\delta\rho$  的幂次展开

在讨论黑洞微扰理论时, 我们主要关注描述黑洞的时空度规  $g_{\mu\nu}$ , 即 Schwarzschild 和 Kerr 度规 (暂不考虑修改引力中的各种度规)。如图2.1所示, 不同的微扰论和展开方法有各自的适用范围和优势区间。

1957 年举办的教堂山会议 (Chapel Hill Conference) 在引力物理学史上具有里程碑意义, 标志着该领域的复兴。从这一重要学术会议召开, 直至 1972 年 Saul Teukolsky 成功推导出 Kerr 时空一阶微扰方程的十五年间, 学界对黑洞微扰论的研究取得了系统性突破与深化发展。现对这一关键时期 (1957-1972) 的重要理论进展梳理如下:

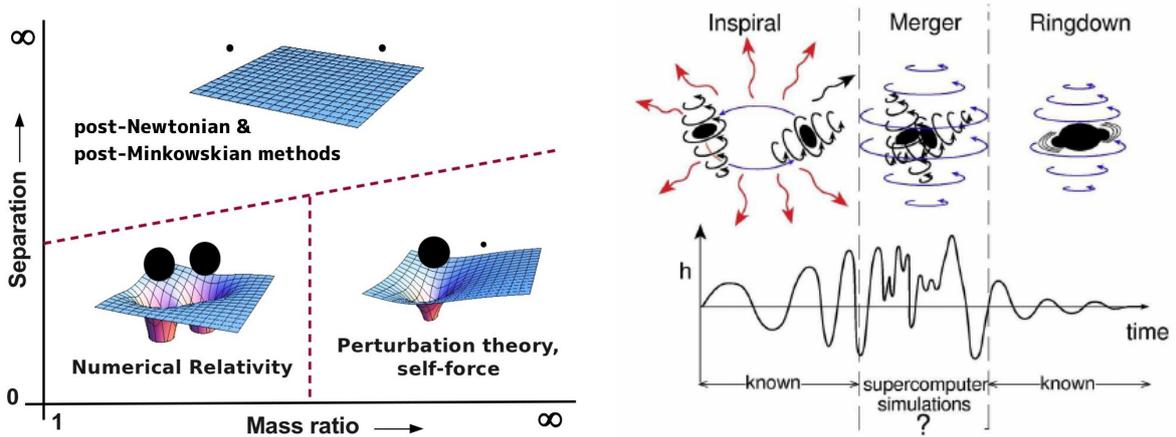


图 2.1 左图是不同质量比和轨道距离的双致密星引力波源所适用的波形计算方法。右图是典型恒星级双黑洞并合事件的过程，其中 inspiral 阶段的波形一般用后牛顿展开计算，merger 阶段用数值相对论模拟，ringdown 阶段可以用黑洞微扰论给出的准正则模很好地描述。

- **1957** Tullio Regge 和 John Wheeler 利用球谐展开方法，推导出 Schwarzschild 时空中的奇宇称微扰方程 [96]。
- **1962** Ezra Newman 和 Roger Penrose 建立了描述 type-D 时空的零标架形式体系 [97]。
- **1963** Roy Kerr 推导出了描述旋转黑洞的爱因斯坦场方程真空解 [98]。
- **1966** Kip Thorne 在 Wheeler 指导下从普林斯顿大学毕业并加入加州理工学院。随后多位研究人员和博士生开始与他合作，包括 William Kinnersley、James Ipser、Richard Price、William Press 和 Saul Teukolsky 等，他们在 1970 年前后都成为了 Thorne 的学生。
- **1967** Robert Boyer 和 Richard Lindquist 提出了 Kerr 度规在无穷远静态观测者参考系下的  $(t, r, \theta, \varphi)$  坐标表示，即著名的 Boyer-Lindquist 坐标系 [90]。
- **1969** Thorne 的第一位博士生 Kinnersley 在 Boyer-Lindquist 坐标系中导出了 Kerr 时空的 Newman-Penrose 标架 [99]。
- **1970** Frank Zerilli 利用 Regge-Wheeler 形式体系，推导出 Schwarzschild 时空的偶宇称微扰方程 [100]。
- **1972** Price 采用 Newman-Penrose 形式体系推导了 Schwarzschild 时空的微扰方程，并重新得到了 Regge-Wheeler 方程 [101]。
- **1972** Bardeen、Press 和 Teukolsky 研究了 Kerr 时空中标量场 (Klein-Gordon 场) 的微扰问题 [102]。
- **1972** Fackerell 和 Ipser 利用 Newman-Penrose 形式体系，分解了 Kerr 时空中弱电磁场的可分离方程 [103]。
- **1972** Teukolsky 采用 Newman-Penrose 形式体系，成功分解了 Kerr 时空中的电磁场和引力场微扰 [104, 105]。

在系统阐述这些理论方法之前，我们必须首先回答一个基础性问题：为何需要发展多种不同的度规微扰计算方法？为何不能简单地采用引力波理论中的标准处理方式，即将度规直接展开为

$$g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

其中  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  表示背景时空度规（平坦时空下即为闵可夫斯基度规  $\eta_{\mu\nu}$ ）。

在一些教材中（如 Maggiore 2007 [106]、Maggiore 2018 [107] 和 Creighton & Anderson 2011 [108]），作者通常会在正式介绍微扰理论之前先引入一些专门的数学工具。例如，在学习 Maggiore 2018 第 12 章的 Regge-Wheeler (RW) 形式之前，需要先掌握 Maggiore 2007 第 3 章中的矢量和张量球谐函数；同样，要理解 Creighton & Anderson 2011 第 4 章中的 Teukolsky 形式，必须先熟悉 Newman-Penrose (NP) 标架理论。

当我初次接触黑洞微扰理论时，曾困惑为何需要这些数学工具。若直接使用式 (2.1) 定义的度规微扰，会得到什么结果？为理解这一点，我们从最简单的情形出发：Schwarzschild 时空的微扰。Regge 和 Wheeler 早在 1957 年就对此进行了研究 [96]，他们利用 Schwarzschild 时空的球对称性，将微扰按标量、矢量和张量球谐函数展开。

此处我们不重复 Regge-Wheeler 的推导过程，而是直接将式 (2.1) 代入场方程，观察所得结果。Schwarzschild 度规及其微扰可表示为：

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ \text{sym} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ \text{sym} & \text{sym} & h_{22} & h_{23} \\ \text{sym} & \text{sym} & \text{sym} & h_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

其中“sym”表示对称分量。现在我们拥有 10 个自由度来选择  $h_{00}$ ,  $h_{01}$ ,  $h_{02}$ ,  $h_{03}$ ,  $h_{11}$ ,  $h_{12}$ ,  $h_{13}$ ,  $h_{22}$ ,  $h_{23}$  和  $h_{33}$ 。首先，我们尝试在球对称真空时空中重构爱因斯坦场方程：

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.3)$$

从 Christoffel 符号出发

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\mu\beta,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}). \quad (2.4)$$

这里的  $g^{\alpha\beta}$  可以通过

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma} \quad (2.5)$$

得到，即

$$\begin{aligned}
 g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} &= (\tilde{g}^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta})(\tilde{g}_{\beta\gamma} + h_{\beta\gamma}), \\
 &= \tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\beta\gamma} + h^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\beta\gamma} + \tilde{g}^{\alpha\beta}h_{\beta\gamma} + h^{\alpha\beta}h_{\beta\gamma}, \\
 &= \delta^\alpha_\gamma + h^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\beta\gamma} + \tilde{g}^{\alpha\beta}h_{\beta\gamma} + \mathcal{O}(h^2).
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

于是，

$$h^{\alpha\sigma} = h^{\alpha\beta}\delta_\beta^\sigma = h^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\beta\gamma}\tilde{g}^{\gamma\sigma} = -\tilde{g}^{\alpha\beta}h_{\beta\gamma}\tilde{g}^{\gamma\sigma} + \mathcal{O}(h^2). \tag{2.7}$$

所以 Christoffel 符号展开到度规微扰的一阶为

$$\begin{aligned}
 \Gamma^\alpha_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\tilde{g}^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta})(\tilde{g}_{\mu\beta,\nu} + h_{\mu\beta,\nu} + \tilde{g}_{\nu\beta,\mu} + h_{\nu\beta,\mu} - \tilde{g}_{\mu\nu,\beta} - h_{\mu\nu,\beta}), \\
 &= \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} + \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}(\tilde{g}_{\mu\beta,\nu} + \tilde{g}_{\nu\beta,\mu} - \tilde{g}_{\mu\nu,\beta}) + \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\beta}(h_{\mu\beta,\nu} + h_{\nu\beta,\mu} - h_{\mu\nu,\beta}) + \mathcal{O}(h^2),
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

其中  $\bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}$  是背景度规  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  对应的 Christoffel 符号。用同样的方法，我们可以得到 Ricci 张量

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\nu} &= R^\rho_{\mu\nu\rho} = \Gamma^\rho_{\mu\nu,\rho} - \Gamma^\rho_{\mu\rho,\nu} + \Gamma^\rho_{\alpha\rho}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\rho}, \\
 &= \bar{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}h^{\rho\sigma}_{,\rho}(\tilde{g}_{\mu\sigma,\nu} + \tilde{g}_{\nu\sigma,\mu} - \tilde{g}_{\mu\nu,\sigma}) - \frac{1}{2}h^{\rho\sigma}_{,\nu}(\tilde{g}_{\mu\sigma,\rho} + \tilde{g}_{\rho\sigma,\mu} - \tilde{g}_{\mu\rho,\sigma}) \\
 &\quad + \frac{1}{2}\tilde{g}^{\rho\sigma}_{,\rho}(h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}) - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\rho\sigma}_{,\nu}(h_{\mu\rho,\nu} + h_{\rho\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}) \\
 &\quad + \frac{1}{2}h^{\rho\sigma}(\tilde{g}_{\nu\sigma,\mu\rho} - \tilde{g}_{\mu\nu,\sigma\rho} + \tilde{g}_{\mu\rho,\sigma\nu} - \tilde{g}_{\rho\sigma,\mu\nu}) + \frac{1}{2}\tilde{g}^{\rho\sigma}(h_{\nu\sigma,\mu\rho} - h_{\mu\nu,\sigma\rho} + h_{\mu\rho,\sigma\nu} - h_{\rho\sigma,\mu\nu}) \\
 &\quad + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}^\rho_{\alpha\rho}[h^{\alpha\beta}(\tilde{g}_{\nu\beta,\mu} + \tilde{g}_{\mu\beta,\nu} - \tilde{g}_{\mu\nu,\beta}) + \tilde{g}^{\alpha\beta}(h_{\nu\beta,\mu} + h_{\mu\beta,\nu} - h_{\mu\nu,\beta})] \\
 &\quad + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}[h^{\rho\sigma}(\tilde{g}_{\alpha\sigma,\rho} + \tilde{g}_{\rho\sigma,\alpha} - \tilde{g}_{\alpha\rho,\sigma}) + \tilde{g}^{\rho\sigma}(h_{\alpha\sigma,\rho} + h_{\rho\sigma,\alpha} - h_{\alpha\rho,\sigma})] \\
 &\quad - \frac{1}{2}\bar{\Gamma}^\rho_{\alpha\nu}[h^{\alpha\beta}(\tilde{g}_{\mu\beta,\rho} + \tilde{g}_{\rho\beta,\mu} - \tilde{g}_{\mu\rho,\beta}) + \tilde{g}^{\alpha\beta}(h_{\mu\beta,\rho} + h_{\rho\beta,\mu} - h_{\mu\rho,\beta})] \\
 &\quad - \frac{1}{2}\bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\rho}[h^{\rho\sigma}(\tilde{g}_{\alpha\sigma,\nu} + \tilde{g}_{\nu\sigma,\alpha} - \tilde{g}_{\alpha\nu,\sigma}) + \tilde{g}^{\rho\sigma}(h_{\alpha\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\alpha} - h_{\alpha\nu,\sigma})] + \mathcal{O}(h^2),
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

其中  $\bar{R}_{\mu\nu} = 0$ ，因为 Schwarzschild 时空代表的是球对称真空解。这样我们将得到 10 个关于  $(t, r, \theta, \varphi)$  的偏微分方程。这 10 个独立函数  $h_{00}, h_{01}, h_{02}, h_{03}, h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{22}, h_{23}, h_{33}$  相互耦合。借助 Mathematica，我们可以推导出这 10 个偏微分方程。这里以  $R_{00} = 0$  的表达

式为例进行说明：

$$\begin{aligned}
 \frac{2M^2 r^3 h_{00}}{(2M-r)} = & 2M^2 r(-2M+r)h_{11} - 2M(2M-r)r \cot \theta h_{12} - 4M^2 h_{22} + 2Mrh_{22} \\
 & - 4M^2 \csc^2 \theta h_{33} + 2Mr \csc^2 \theta h_{33} - 4M^2 r \csc^2 \theta \partial_\varphi h_{13} + 2Mr^2 \csc^2 \theta \partial_\varphi h_{13} \\
 & + r^4 \csc^2 \theta \partial_{\varphi\varphi} h_{00} + r^4 \cot \theta \partial_\theta h_{00} - 4M^2 r \partial_\theta h_{12} + 2Mr^2 \partial_\theta h_{12} + r^4 \partial_{\theta\theta} h_{00} \\
 & - 5Mr^4 \partial_r h_{00} + 2r^5 \partial_r h_{00} + 4M^3 r^2 \partial_r h_{11} - 4M^2 r^3 \partial_r h_{11} + Mr^4 \partial_r h_{11} \\
 & + 2M^2 r \partial_r h_{22} - Mr^2 \partial_r h_{22} + 2M^2 r \csc^2 \theta \partial_r h_{33} - Mr^2 \csc^2 \theta \partial_r h_{33} \\
 & - 2Mr^5 \partial_{rr} h_{00} + r^6 \partial_{rr} h_{00} + 6Mr^4 \partial_t h_{01} - 4r^5 \partial_t h_{01} - 2r^4 \cot \theta \partial_t h_{02} \\
 & - 2r^4 \csc^2 \theta \partial_\varphi h_{03} - 2r^4 \partial_\theta h_{02} + 4Mr^5 \partial_{tr} h_{01} - 2r^6 \partial_{tr} h_{01} \\
 & - 2Mr^5 \partial_{tt} h_{11} + r^6 \partial_{tt} h_{11} + r^4 \partial_{tt} h_{22} + r^4 \csc^2 \theta \partial_{tt} h_{33}.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

在施加适当的边界条件和规范条件后，可以将独立函数的数量从 10 个减少到 2 个，即引力波的两个偏振模式  $h_+$  和  $h_\times$ 。然而，在没有计算机辅助的情况下求解这些偏微分方程仍然是极其困难的。这促使 Regge 和 Wheeler 等研究者寻找将  $h_{\mu\nu}$  展开为不同谐波分量的方法，以分解这些函数。换句话说，我们需要找到在其偏微分方程中不与其他分量相互作用的函数，如

$$\mathcal{D}\psi = \mathcal{S}, \tag{2.11}$$

其中  $\mathcal{D}$  是关于  $(t, r, \theta, \varphi)$  的二阶偏微分算子， $\mathcal{S}$  是非齐次项，它是微扰源能动量张量  $T_{\mu\nu}$  的函数。人们提出了两种不同但等效的方法来构造  $\psi$ ，下面将分别介绍。

## 2. Regge-Wheeler-Zerilli 形式

### 2.1 Regge-Wheeler-Zerilli 方程

Regge 和 Wheeler 发现了三个在宇称变换下反对称的函数： $h_0(t, r, \theta, \varphi)$ 、 $h_1(t, r, \theta, \varphi)$  和  $h_2(t, r, \theta, \varphi)$ （满足  $\theta \rightarrow \pi - \theta$  变换反对称性）。他们利用标量、矢量和张量球谐函数  $Y_{lm}^{S,V,T}(\theta, \varphi)$  将偏微分方程中的  $\theta$  和  $\varphi$  分离变量，并应用 Regge-Wheeler 规范条件，最终推导出著名的 Regge-Wheeler 方程来描述 Schwarzschild 时空的奇宇称微扰 [96]。1970 年，Zerilli 推导出描述另外 7 个自由度的偶宇称微扰方程 [100]。Regge-Wheeler-Zerilli 形式可以重新整理为满足类薛定谔（Schrödinger）方程的形式：

$$\frac{d^2 \Psi_\bullet}{dr_*^2} + (\omega^2 - V_\bullet) \Psi_\bullet = 0, \tag{2.12}$$

其中  $\bullet = (\text{RW}, \text{Z})$ ， $r_*$  是乌龟坐标，其定义为

$$\frac{dr}{dr_*} = \mathcal{B}(r) \equiv 1 - \frac{2M}{r} \quad \text{or} \quad r_*(r) = r - 2M \ln \left( \frac{r}{2M} - 1 \right) + \text{const}. \tag{2.13}$$

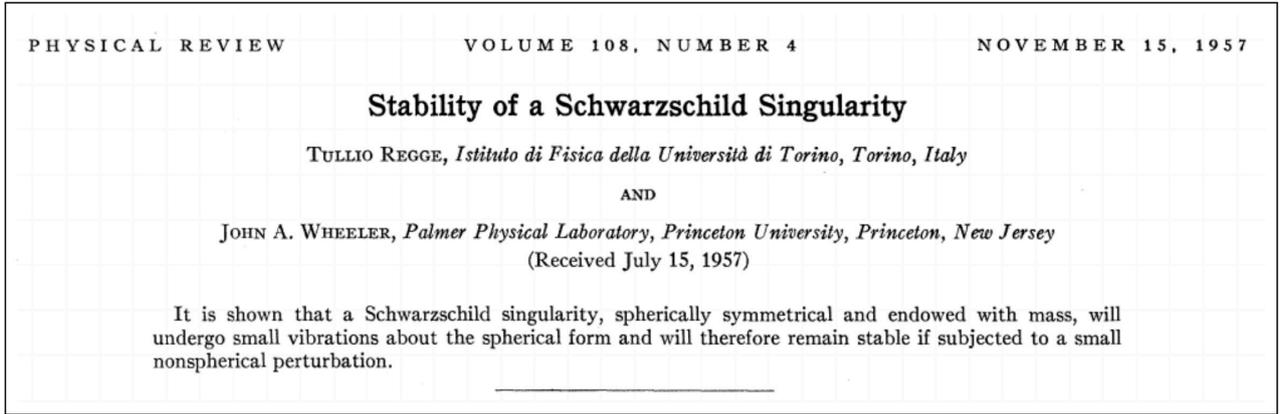


图 2.2 Regge 和 Wheeler 在 1957 年发表的奠基性论文，正式建立了黑洞微扰理论的理论框架。需要说明的是，该论文发表时“黑洞”这一术语尚未被科学界广泛采用，因此原文标题中仍使用“奇点”的表述。

奇偶两个方程的有效势为

$$\begin{aligned}
 V_{RW}(r) &= \mathcal{B}(r) \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right], \\
 V_Z(r) &= \frac{2\mathcal{B}(r)}{r^3} \frac{9M^3 + 3\beta_l^2 M r^2 + \beta_l^2 (1 + \beta_l) r^3 + 9M^2 \beta_l r}{(3M + \beta_l r)^2},
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

其中  $\beta_l = (l-1)(l+2)/2$ 。TT 规范下的引力波  $h_+$  和  $h_\times$  可以通过  $\Psi_{RW}(r \rightarrow \infty)$  和  $\Psi_Z(r \rightarrow \infty)$  的渐进解构造。可以看出，这种谐波分解方法帮助我们构造了两个主函数  $\Psi_{RW}$  和  $\Psi_Z$ ，它们满足式 (2.11)。因此，与直接使用式 (2.2) 中的  $h_{\mu\nu}$  相比，这种方法使得微扰方程可以解析求解。

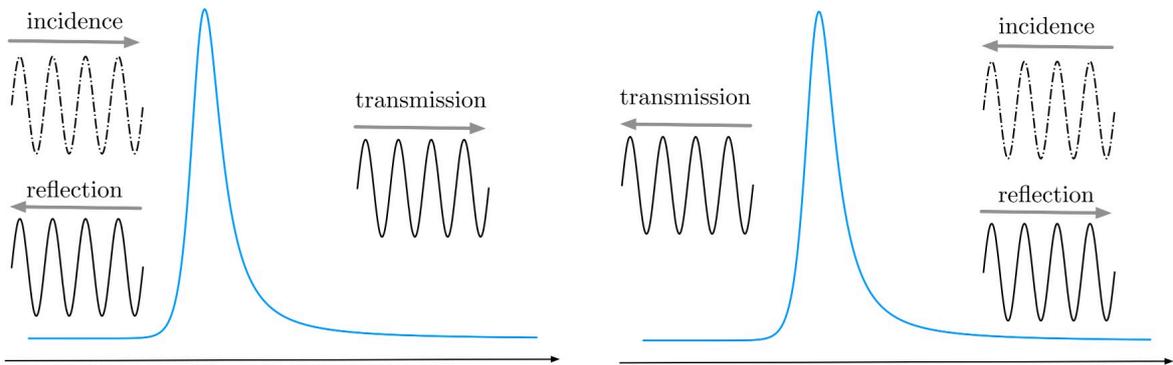


图 2.3 薛定谔方程两组渐进解的物理含义。左图表示“up”解，它描述了来自负无穷入射波（incidence）经过势垒时，部分被反射（reflection）回到负无穷，部分穿越（transmission）势垒传播到正无穷。右图表示“in”解，它描述了来自正无穷入射波经过势垒时，部分被反射回到正无穷，部分穿越势垒传播到负无穷。图片均出自：R. K. L. Lo, 2024 [109]。

## 2.2 类薛定谔方程的渐进解

从(2.13)式可知, Regge-Wheeler-Zerilli 方程是一个齐次方程, 它实际上描述了时空的微小扰动如何在  $r$  方向上传播。类比量子力学中的一维定态薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi, \quad (2.15)$$

它们都表征了波函数在时空或相空间中的传播行为。其中, 能够传播至无穷远的部分对应着时空因果结构(即光锥)的作用范围, 这也正是我们实际能够探测到的引力波信号。从物理本质来看, Regge-Wheeler 方程揭示了 Schwarzschild 黑洞对引力波的散射效应: 当引力波在 Schwarzschild 时空中传播时, 会遇到有效势垒  $V(r)$ , 其部分透射波被黑洞视界吸收, 部分反射波传播至无穷远。类比薛定谔方程(2.15), 当势场在无穷远满足  $V(x) \sim \mathcal{O}(x^{-2})$  且能量  $E > 0$  时, 可得到两组渐进解:

$$\begin{aligned} \psi^{\text{up}}(x) &\rightarrow \begin{cases} A^{\text{inc}} e^{ik_1 x} + A^{\text{ref}} e^{-ik_1 x} & x \rightarrow -\infty, \\ A^{\text{trans}} e^{ik_2 x} & x \rightarrow \infty. \end{cases} \\ \psi^{\text{in}}(x) &\rightarrow \begin{cases} B^{\text{trans}} e^{-ik_1 x} & x \rightarrow -\infty, \\ B^{\text{inc}} e^{-ik_2 x} + B^{\text{ref}} e^{ik_2 x} & x \rightarrow \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.16)$$

图2.3形象地诠释了这两组解的物理意义。一般情况下  $k_1 \neq k_2$ , 这使得渐进振幅  $A \neq B$ 。我们定义透射系数  $T$  (Transmission) 和反射系数  $R$  (Reflection) 来反映波函数经过这个势垒后的能量分配情况

$$T = \frac{|A^{\text{trans}}|^2}{|A^{\text{inc}}|^2}, \quad R = \frac{|A^{\text{ref}}|^2}{|A^{\text{inc}}|^2}. \quad (2.17)$$

能量守恒告诉我们  $T + R = 1$ 。

## 2.3 Regge-Wheeler-Zerilli 方程的数值解法

回到 Regge-Wheeler-Zerilli 方程, 在 Schwarzschild 时空中, 坐标  $r$  并非薛定谔方程中的  $x$  可以延伸到负无穷, 而是从视界  $r = 2M$  起始。这是我们定义乌龟坐标  $r_*$ (2.13)的直接原因。图2.4中展示了坐标变换的结果, 其中  $r_*(r \rightarrow 2M) = -\infty$ ,  $r_*(r \rightarrow +\infty) = +\infty$ 。图2.5展示了 Regge-Wheeler 势(2.14)在  $r_*$  坐标下的行为, 当  $r_* \rightarrow -\infty$  时  $V_{\text{RW}}$  指数衰减, 当  $r_* \rightarrow +\infty$  时  $V_{\text{RW}}$  以  $\mathcal{O}(r_*^{-2})$  的速度衰减。

根据前文对薛定谔方程的类比分析, Regge-Wheeler-Zerilli 方程理论上应存在两组渐进解  $\Psi_{\text{RW/Z}}^{\text{in}}$  和  $\Psi_{\text{RW/Z}}^{\text{up}}$ 。然而经典黑洞理论表明, 任何物质都无法逃离黑洞引力作用, 这意味着在

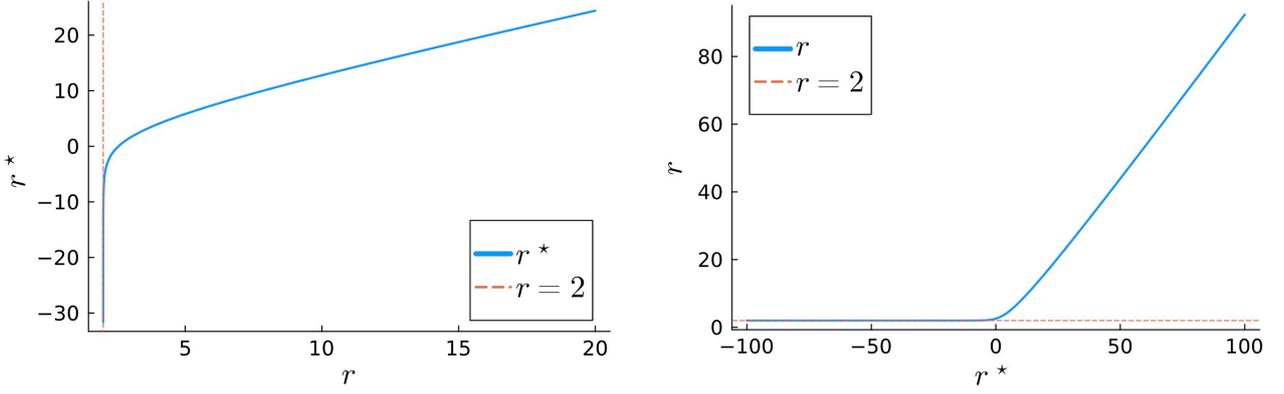


图 2.4 乌龟坐标  $r_*$  与 Boyer-Lindquist 坐标间的相互转换。左图是从  $r$  到  $r_*$  的映射，右图是从  $r_*$  到  $r$  的映射。 $r = 2M$  为渐进线， $r_*$  可以从正无穷延伸到负无穷。

视界边界条件下“up”解（出射波解）不具有物理实在性，相比之下“in”解（入射波解）更符合实际物理过程。但“up”解在数学上仍具有重要价值：当处理非齐次方程时，需要这两组齐次解构成完备基，用以构建格林函数——这一方法将在下一章关于 EMRI 波形计算的部分进行详细讨论。

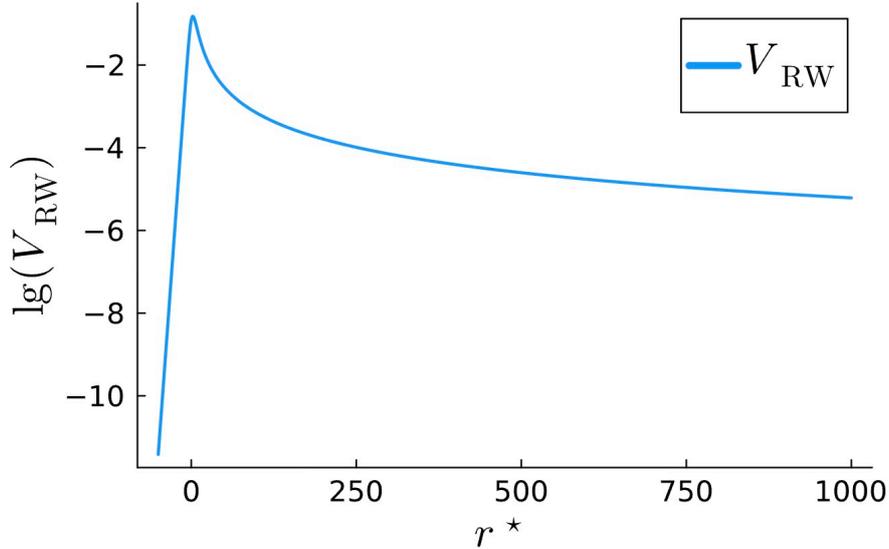


图 2.5 Regge-Wheeler 势在乌龟坐标下的渐进行为。Zerilli 势也有相同的渐进行为。

以 Regge-Wheeler 方程为例，“in”解可以表示成

$$\Psi_{RW}(r_*) \rightarrow \begin{cases} e^{-i\omega r_*} & r_* \rightarrow -\infty, \\ A_{\text{in}}(\omega)e^{-i\omega r_*} + A_{\text{out}}(\omega)e^{i\omega r_*} & r_* \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.18)$$

此处我们采用归一化约定  $A^{\text{trans}} \equiv 1$ ，因为在数值计算中，我们实际上是从  $r_* \rightarrow -\infty$  向外数值积分，最后通过匹配  $r_* \rightarrow +\infty$  系数的方式定出  $A^{\text{in}} \equiv A^{\text{inc}}$  和  $A^{\text{out}} \equiv A^{\text{ref}}$ 。因而吸收和反

射系数定义为

$$T = \frac{1}{|A_{\text{in}}|^2}, \quad R = \frac{|A_{\text{out}}|^2}{|A_{\text{in}}|^2}. \quad (2.19)$$

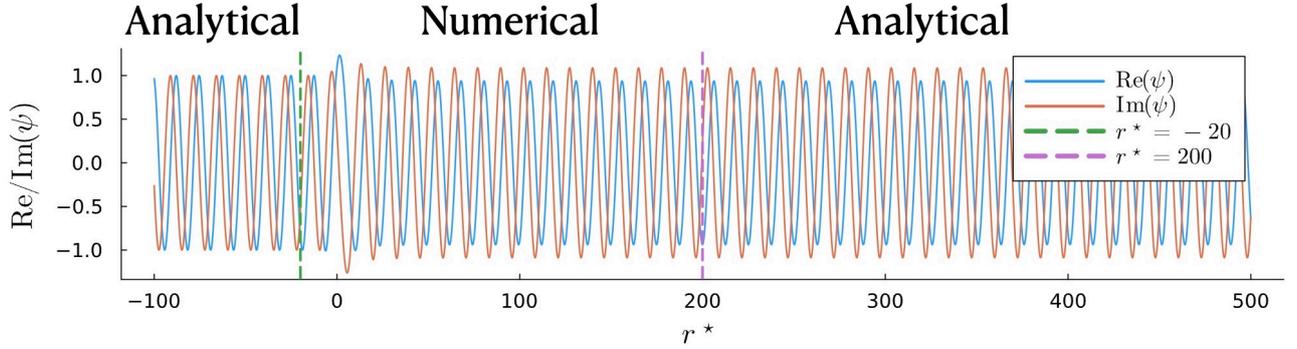


图 2.6 Regge-Wheeler 方程在  $l = 2$ ,  $\omega M = 0.5$  时的 “in” 解，渐进振幅  $A_{\text{in}} = -0.821201 + 0.584258i$ ,  $A_{\text{out}} = 0.003454 + 0.125364i$

一般来说，我们很难真的从负无穷积分到正无穷，真正的做法是选定一个足够接近视界的位置，如  $r_{\text{in}}^{\text{in}} = -20M$  ( $r = 2.0000334028437M$ )，积分到一个足够接近无穷远的位置，如  $r_{\text{out}}^{\text{out}} = 200M$  ( $r = 190.903818384934M$ )。在  $r_* < r_{\text{in}}^*$  和  $r_* > r_{\text{out}}^*$  处用渐进的解析解(2.18)连接，如图2.6所示。

### 3. Newman-Penrose 形式

为推导 Teukolsky 方程，首先需要引入 Newman-Penrose 标架体系。本节将系统阐述广义相对论框架下的标架理论形式体系，该部分数学推导较为抽象，主要面向理论研究者，其他读者可选择略过。

#### 3.1 Lie 括号和 Lie 微分

给定任意两个矢量场  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{Y}$ ，它们的 Lie 括号  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  定义为对任意函数  $f$  的作用，即

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f = (\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X})f = \mathbf{X}(\mathbf{Y}f) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}f). \quad (2.20)$$

任何两个正切矢量的 Lie 括号也是一个正切矢量，因为

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](\alpha f + \beta g) = \alpha[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f + \beta[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]g, \quad (2.21)$$

和

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](fg) = g[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f + f[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]g, \quad (2.22)$$

其中  $f$  和  $g$  是任意两个函数,  $\alpha$  和  $\beta$  是两个任意实数, 第一个等式是显然的, 第二个等式的证明如下:

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}, \mathbf{Y}](fg) &= \mathbf{X}(\mathbf{Y}fg) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}fg) \\ &= \mathbf{X}(g\mathbf{Y}f + f\mathbf{Y}g) - \mathbf{Y}(g\mathbf{X}f + f\mathbf{X}g) \\ &= g\mathbf{X}\mathbf{Y}f + (\mathbf{X}g)(\mathbf{Y}f) + (\mathbf{X}f)(\mathbf{Y}g) + f\mathbf{X}\mathbf{Y}g \\ &\quad - \{g\mathbf{Y}\mathbf{X}f + (\mathbf{X}f)(\mathbf{Y}g) + (\mathbf{Y}f)(\mathbf{X}g) + f\mathbf{Y}\mathbf{X}g\} \\ &= g[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f + f[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]g. \end{aligned} \quad (2.23)$$

由此可知, Lie 括号是一个线性算符, 且它是一个微分。Lie 括号满足 **Jacobi 恒等式**

$$[[\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}] + [[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], \mathbf{X}] + [[\mathbf{Z}, \mathbf{X}], \mathbf{Y}] = 0. \quad (2.24)$$

我们已经看到,  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{Y}$  的 Lie 括号是一个正切矢量, 它的相对于局域坐标基的分量可由它对  $x^j$  的作用得到, 即有

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^j \equiv (\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X})x^j = \mathbf{X}\mathbf{Y}^j - \mathbf{Y}\mathbf{X}^j = X^k Y^j_{,k} - Y^k X^j_{,k}, \quad (2.25)$$

其中(如前已指明的)指标前的逗号表示对该指标的局域坐标求偏导数。在局域坐标基里, Lie 括号  $[\partial_k, \partial_j]$  为零, 因为局域时空是平直的, 偏导之间可以交换顺序。

由于 Lie 括号可以视作一种求导,  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  被称为  $\mathbf{Y}$  在  $\mathbf{X}$  方向上的 Lie 导数, 并被写为

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -[\mathbf{Y}, \mathbf{X}] = -\mathcal{L}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}. \quad (2.26)$$

更一般地, 将一个给定类型张量场  $\mathbf{T}$  的 Lie 导数  $\mathcal{L}_{\mathbf{Y}}\mathbf{T}$  定义为符合下列规则的同样类型张量:

- 它对标量场  $f$  的作用为

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}f = \mathbf{X}f = df(\mathbf{X}). \quad (2.27)$$

- 它对(正切)矢量  $\mathbf{Y}$  的作用为

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]. \quad (2.28)$$

- 它对张量的作用符合莱布尼茨法则:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}) = \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{S} \otimes \mathbf{T} + \mathbf{S} \otimes \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}. \quad (2.29)$$

上述规则的最后一个能用来导出  $\mathcal{L}_X$  作用于任意类型张量的效果。它作用于 1-形式（余切矢量） $\omega$  的效果能由对任意矢量场  $Y$  考虑收缩形式的关系

$$\mathcal{L}_X(\omega \otimes Y) = (\mathcal{L}_X\omega) \otimes Y + \omega \otimes (\mathcal{L}_XY) \quad (2.30)$$

来确定，也就是

$$\mathcal{L}_X\langle\omega, Y\rangle = \langle\mathcal{L}_X\omega, Y\rangle + \langle\omega, \mathcal{L}_XY\rangle. \quad (2.31)$$

写出分量表达式，即为

$$X^k(\omega_j Y^j)_{,k} = (\mathcal{L}_X\omega)_j Y^j + \omega_j (\mathcal{L}_XY)^j. \quad (2.32)$$

由(2.25)式可得

$$(\mathcal{L}_X\omega)_j Y^j = X^k(\omega_{j,k} Y^j + \omega_j Y^j_{,k}) - \omega_j (X^k Y^j_{,k} - Y^k X^j_{,k}) = (X^k \omega_{j,k} + \omega_k X^k_{,j}) Y^j. \quad (2.33)$$

由于上述表达式对任意  $Y$  都成立，因此

$$(\mathcal{L}_X\omega)_j = \omega_{j,k} X^k + \omega_k X^k_{,j}. \quad (2.34)$$

矢量表达式即为

$$\mathcal{L}_X[\omega(Y)] = (\mathcal{L}_X\omega)Y + \omega(\mathcal{L}_XY). \quad (2.35)$$

将其推广到  $(r, s)$  型张量，有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X[T(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s)] &= (\mathcal{L}_XT)(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) \\ &+ T(\mathcal{L}_X\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) + \dots + T(\omega^1 + \dots, \omega^r, Y_1, \dots, \mathcal{L}_XY_s). \end{aligned} \quad (2.36)$$

除了等式右边第一项外，这个方程中所有的项都能用已知的结果(2.25)，(2.27)，(2.34)式来计算。因此  $\mathcal{L}_XT$  的分量就能由(2.36)式得出。

为了便于后面的应用，这里推导一个联系 1-形式的外导数与 Lie 导数的简单等式，由(2.34)式可得

$$\begin{aligned} &\langle\mathcal{L}_X\omega, Y\rangle - Y\langle\omega, X\rangle \\ &= (\omega_{j,k} X^k + \omega_k X^k_{,j}) Y^j - Y^j (\omega_{k,j} X^k + \omega_k X^k_{,j}) \\ &= (\omega_{j,k} - \omega_{k,j}) X^k Y^j = 2d\omega(X, Y). \end{aligned} \quad (2.37)$$

现在由(2.31)式代换  $\langle\mathcal{L}_X\omega, Y\rangle$ ，我们可以得到

$$d\omega(X, Y) = \frac{1}{2}\{X\langle\omega, Y\rangle - Y\langle\omega, X\rangle - \langle\omega, [X, Y]\rangle\}, \quad (2.38)$$

其中  $\mathcal{L}_XY$  被写为 Lie 括号  $[X, Y]$  的形式。

### 3.2 一般标架 (tetrad) 理论

标架即坐标架，是人们为了研究各种问题而设置的一套完备的描述时空坐标的框架，在广义相对论中时空是四维的，因此需要四个线性无关的方向作为基矢。

#### 3.2.1 标架的建立

在每个时空点上，我们可以设置 4 个逆变矢量基，即标架：

$$e_{(a)}^i \quad (a = 1, 2, 3, 4). \quad (2.39)$$

括号中的指标  $(a)$  为标架指标（本节用  $a, b$  等排在前面的拉丁字母表示标架指标，用  $i, j$  等排在后面等拉丁字母表示张量指标，时空仍是四维的）。与逆变标架对偶的协变标架定义为：

$$e_{(a)i} = g_{ik} e_{(a)}^k, \quad (2.40)$$

其中  $g_{ik}$  为度规张量，另外再定义矩阵  $\{e_{(a)}^i\}$  的逆  $e^{(b)}_i$ ，满足

$$e_{(a)}^i e^{(b)}_i = \delta^{(b)}_{(a)}, \quad e_{(a)}^i e^{(a)}_j = \delta^i_j, \quad (2.41)$$

其中采用对两类指标各自独立求和的惯例。进一步，作为定义的一部分，令

$$e_{(a)}^i e_{(b)i} = \eta_{(a)(b)}, \quad (2.42)$$

其中  $\eta_{(a)(b)}$  是常数对称矩阵。 $\eta^{(a)(b)}$  为矩阵  $\eta_{(a)(b)}$  的逆，即

$$\eta^{(a)(b)} \eta_{(b)(c)} = \delta^{(a)}_{(c)}. \quad (2.43)$$

从而我们可以定义标架指标的升降：

$$\eta_{(a)(b)} e^{(a)}_i = e_{(b)i}, \quad \eta^{(a)(b)} e_{(a)i} = e^{(b)}_i, \quad (2.44)$$

以及标架指标的缩并

$$e_{(a)i} e^{(a)}_j = g_{ij}. \quad (2.45)$$

给定任意矢量，我们可以将其投影到任意标架上，得到标架分量，

$$\begin{aligned} A_{(a)} &= e_{(a)j} A^j = e_{(a)}^j A_j, \\ A^{(a)} &= \eta^{(a)(b)} A_{(b)} = e^{(a)}_j A^j = e^{(a)j} A_j, \\ A^i &= e_{(a)}^i A^{(a)} = e^{(a)i} A_{(a)}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

对张量，我们有

$$\begin{aligned} T_{(a)(b)} &= e_{(a)}{}^i e_{(b)}{}^j T_{ij} = e_{(a)}{}^i T_{i(b)}, \\ T_{ij} &= e^{(a)}{}_i e^{(b)}{}_j T_{(a)(b)} = e^{(a)}{}_i T_{(a)j}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

根据(2.41), (2.42), (2.43), (2.44)式，我们可以做如下总结：

- 标架是时空中正交基，张量在不同标架下的投影得到的分量不同，但张量本身与标架的选取无关（可以理解为欧氏时空中的笛卡尔坐标系，球坐标系等不同坐标系的选取）；
- 用  $\eta^{(a)(b)}$  和  $\eta_{(a)(b)}$  可以提升或降低标架指标，正如用度规张量提升和降低张量指标一样；
- 两类指标并存的张量的存在没有疑义，可以通过标架变换矩阵  $e_{(a)}{}^i$ ,  $e^{(a)}{}_i$  实现标架变换；
- 张量缩并无论是对张量指标还是对标架指标进行，结果相同，证明如下：

$$\begin{aligned} T^{(a)}{}_{(a)} &= \eta^{(a)(b)} T_{(b)(a)} = e^{(a)}{}_i e^{(b)i} e_{(a)}{}^i T_{i(b)} \\ &= e^{(b)i} T_{i(b)} = e^{(b)i} e_{(b)}{}^j T_{ij} = g^{ij} T_{ij} = T^i{}_i. \end{aligned} \quad (2.48)$$

### 3.2.2 方向导数和里奇 (Ricci) 旋转系数

下面我们将看到标架作为方向导数的效用，逆变矢量  $e_{(a)}$  亦称为正切矢量，规定方向导数

$$e_{(a)} = e_{(a)}{}^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (2.49)$$

因而

$$\phi_{;(a)} \equiv e_{(a)}{}^i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = e_{(a)}{}^i \phi_{;i}, \quad (2.50)$$

其中  $\phi$  是任意标量场，更一般地，可以推导出

$$\begin{aligned} A_{(a),(b)} &= e_{(b)}{}^i \frac{\partial}{\partial x^i} A_{(a)} = e_{(b)}{}^i \frac{\partial}{\partial x^i} e_{(a)}{}^j A_j \\ &= e_{(b)}{}^i e_{(a)}{}^j A_{j;i} + e_{(b)}{}^i A_j e_{(a)}{}^j{}_{;i} \\ &= e_{(b)}{}^i e_{(a)}{}^j A_{j;i} + e_{(b)}{}^i e_{(a)}{}^k{}_{;i} e_{(c)k} A^{(c)} \\ &= e_{(b)}{}^i e_{(a)}{}^j A_{j;i} + e_{(b)}{}^i e_{(a)k;i} e_{(c)}{}^k A^{(c)}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

定义里奇旋转系数

$$\gamma_{(c)(a)(b)} \equiv e_{(c)}{}^k e_{(a)k;i} e_{(b)}{}^i. \quad (2.52)$$

则(2.51)式可以写成

$$A_{(a),(b)} = e_{(a)}{}^j A_{j;i} e_{(b)}{}^i + \gamma_{(c)(a)(b)} A^{(c)}. \quad (2.53)$$

里奇旋转系数的另一个等价定义为

$$e_{(a)k;i} = e^{(c)}_k \gamma_{(c)(a)(b)} e^{(b)}_i. \quad (2.54)$$

由于  $\eta_{(a)(b)}$  为常对称矩阵，所以

$$0 = \eta_{(a)(b);i} = [e_{(a)k} e_{(b)}^k]_{;i}. \quad (2.55)$$

因此里奇旋转系数的第一对指标是反对称的

$$\gamma_{(c)(a)(b)} = -\gamma_{(a)(c)(b)}, \quad (2.56)$$

证明如下：

$$\begin{aligned} \gamma_{(c)(a)(b)} + \gamma_{(a)(c)(b)} &= [e_{(c)}^k e_{(a)k;i} + e_{(a)}^k e_{(c)k;i}] e_{(b)}^i \\ &= [e_{(c)}^k e_{(a)k}]_{;i} e_{(b)}^i \\ &= \eta_{(a)(c);i} e_{(b)}^i \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

利用这个反对称性，我们还可以得到

$$e_{(a)}^k_{;i} = -e^{(c)k} \gamma_{(a)(c)(b)} e^{(b)}_i = -\gamma_{(a)}^k_{;i}. \quad (2.58)$$

回到(2.53)式，将所有张量指标之间的关系与标架指标间的关系分离，我们可以得到

$$e_{(a)}^i A_{i;j} e_{(b)}^j = A_{(a),(b)} - \eta^{(n)(m)} \gamma_{(n)(a)(b)} A_{(m)}. \quad (2.59)$$

等式右边的量称为  $A_{(a)}$  在  $e_{(b)}$  方向的**内在导数**，并记为  $A_{(a)|(b)}$ ：

$$A_{(a)|(b)} \equiv e_{(a)}^i A_{i;j} e_{(b)}^j = A_{(a),(b)} - \eta^{(n)(m)} \gamma_{(n)(a)(b)} A_{(m)}. \quad (2.60)$$

由定义清楚可见，在标架理论中旋转系数  $\gamma$  扮演了流形中 Christoffel 联络的角色。我们能够自由地从内在导数转变到协变导数，反之亦然。将矢量场的内在导数扩展到张量场，我们得到黎曼张量的内在导数

$$R_{(a)(b)(c)(d)|(f)} = R_{ijkl;m} e_{(a)}^i e_{(b)}^j e_{(c)}^k e_{(d)}^l e_{(f)}^m. \quad (2.61)$$

将不同基矢的协变导数分别用旋转系数置换（按照关系(2.58)），可得

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)(c)(d)|(f)} &= R_{(a)(b)(c)(d),(f)} - \eta^{(n)(m)} [\gamma_{(n)(a)(f)} R_{(m)(b)(c)(d)} \\ &\quad + \gamma_{(n)(b)(f)} R_{(a)(m)(c)(d)} + \gamma_{(n)(c)(f)} R_{(a)(b)(m)(d)} + \gamma_{(n)(d)(f)} R_{(a)(b)(c)(m)}]. \end{aligned} \quad (2.62)$$

### 3.2.3 转换关系和结构常数

Lie 括号  $[e_{(a)}, e_{(b)}]$  在理论中起有重要作用，其 Lie 群结构的封闭性要求：

$$[e_{(a)}, e_{(b)}] = C^{(c)}_{(a)(b)} e_{(c)}, \quad (2.63)$$

其中系数  $C^{(a)}_{(a)(b)}$  被称为**结构常数**，它们对指标  $(a)$  和  $(b)$  是反对称的，并且共有 24 个。结构常数能用旋转系数表示，若考虑 Lie 括号对标量场  $f$  的作用，有

$$\begin{aligned} [e_{(a)}, e_{(b)}]f &= e_{(a)}^i [e_{(b)}^j f_{,j}]_{,i} - e_{(b)}^i [e_{(a)}^j f_{,j}]_{,i} \\ &= [e_{(a)}^i e_{(b)}^j{}_{,i} - e_{(b)}^i e_{(a)}^j{}_{,i}] f_{,j} \\ &= [-\gamma_{(b)}^j{}_{(a)} + \gamma_{(a)}^j{}_{(b)}] f_{,j} \\ &= [-\gamma_{(b)}^{(c)}{}_{(a)} + \gamma_{(a)}^{(c)}{}_{(b)}] e_{(c)}^j f_{,j}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

将其与(2.63)式比较可得

$$C^{(c)}_{(a)(b)} = \gamma_{(b)(a)}^{(c)} - \gamma_{(a)(b)}^{(c)}. \quad (2.65)$$

以旋转系数表示的结构常数代入(2.63)式，我们将得到 24 个**转换关系**。

### 3.2.4 Ricci 与 Bianchi 恒等式

将 Ricci 恒等式

$$e_{(a)i;k;l} - e_{(a)i;l;k} = R_{mikl} e_{(a)}^m, \quad (2.66)$$

投影到标架上，我们得到

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)(c)(d)} &= R_{mikl} e_{(a)}^m e_{(b)}^i e_{(c)}^k e_{(d)}^l \\ &= \{-[\gamma_{(a)(f)(g)} e^{(f)}{}_i e^{(g)}{}_k]_{,l} + [\gamma_{(a)(f)(g)} e^{(f)}{}_i e^{(g)}{}_l]_{,k}\} e_{(b)}^i e_{(c)}^k e_{(d)}^l. \end{aligned} \quad (2.67)$$

现在将右边方括号中的量展开，并再次将基矢量的协变导数分别用旋转系数置换，我们得到

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)(c)(d)} &= -\gamma_{(a)(b)(c),(d)} + \gamma_{(a)(b)(d),(c)} \\ &\quad + \gamma_{(b)(a)(f)} [\gamma_{(c)}^{(f)}{}_{(d)} - \gamma_{(d)}^{(f)}{}_{(c)}] \\ &\quad + \gamma_{(f)(a)(c)} \gamma_{(b)}^{(f)}{}_{(d)} - \gamma_{(f)(a)(d)} \gamma_{(b)}^{(f)}{}_{(c)}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

由于旋转系数对其第一对指标的反对称性和构造黎曼张量四次分量操作的明显反对称性，可清楚看到(2.68)式共有 36 个分量方程。

最后，将 Bianchi 恒等式用内在导数和标架来表示，可以得到

$$\begin{aligned}
 R_{(a)(b)[(c)(d)|(f)]} &= \frac{1}{6} \sum_{[(c)(d)(f)]} \{R_{(a)(b)(c)(d),(f)} \\
 &\quad - \eta^{(n)(m)} [\gamma_{(n)(a)(f)} R_{(m)(b)(c)(d)} + \gamma_{(n)(b)(f)} R_{(a)(m)(c)(d)} \\
 &\quad + \gamma_{(n)(c)(f)} R_{(a)(b)(m)(d)} + \gamma_{(n)(d)(f)} R_{(a)(b)(c)(m)}] \},
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

共有 20 个线性独立的此类方程。

四次标架的基本方程是 24 个转换关系，如(2.63)式，36 个 Ricci 恒等式(2.68)和 20 个线性独立的 Bianchi 恒等式。不清楚的是，这些方程有多少是独立的，对它们怎样排列和使用，而且它们究竟适合于什么。所有这些问题都将在下文适当的地方加以解决。

### 3.3 Newman-Penrose 标架

纽曼-彭罗斯标架是一种有着特别选择的基矢的四次标架。所做的选择是 4 个零矢量  $l, n, m$  和  $\bar{m}$ ，其中  $l$  和  $n$  是实基矢，而  $m$  和  $\bar{m}$  是互为共轭的复基矢。这种形式由纽曼和彭罗斯于 1962 年首创的 [110, 111]，正是其对零基的选择：它背离了到当时仍习以为常的正交基的选择。选择零基的潜在动力是彭罗斯的坚强信念，即时空的基本要素是使得引入旋量基称为可能的光锥结构。将会看到，广义相对论的黑洞解的时空光锥结构的确就是这样的类型，使纽曼-彭罗斯形式对掌握这些时空的内在对称性并揭示其解析的丰富性最为有效。但现在已可指出，纽曼-彭罗斯形式对广义相对论黑洞解的特别适应性是来自其“type-D”特征和哥尔德伯-萨赫定理。

#### 3.3.1 NP 标架下的自旋系数

如前所述，NP 标架的基矢选择是两个实数零矢量  $l, n$  和一对共轭复数零矢量  $m, \bar{m}$  组成的零基。要求它们满足正交条件

$$l \cdot m = l \cdot \bar{m} = n \cdot m = n \cdot \bar{m} = 0. \tag{2.70}$$

根据零矢条件

$$l \cdot l = n \cdot n = m \cdot m = \bar{m} \cdot \bar{m} = 0, \tag{2.71}$$

即这组标架为零（类光）标架。通常我们还给这些基矢进一步加上归一化条件

$$l \cdot n = 1 \quad m \cdot \bar{m} = -1. \tag{2.72}$$

但实际上,加上这个进一步的条件不是必要的。在 NP 标架之后, Penrose 等人又发展出了 GHP 标架理论,使之具有更多的对称性和自由度。但是,我们还是选择在这里保留这一归一化条件。于是,由  $\eta_{(a)(b)}$  表示的基本矩阵是一个常对称矩阵可以写为

$$[\eta_{(a)(b)}] = [\eta^{(a)(b)}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

对应的零标架定义为

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{l}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{m}, \quad \mathbf{e}_4 = \bar{\mathbf{m}}. \quad (2.74)$$

其协变形式为

$$\mathbf{e}^1 = \mathbf{e}_2 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{e}^2 = \mathbf{e}_1 = \mathbf{l}, \quad \mathbf{e}^3 = -\mathbf{e}_4 = -\bar{\mathbf{m}}, \quad \mathbf{e}^4 = -\mathbf{e}_3 = -\mathbf{m}. \quad (2.75)$$

当它们作为方向导数时,我们定义一组新的符号

$$\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{D} = l^\mu \partial_\mu, \quad \mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{\Delta} = n^\mu \partial_\mu, \quad \mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{\delta} = m^\mu \partial_\mu, \quad \mathbf{e}_4 \equiv \bar{\mathbf{\delta}} = \bar{m}^\mu \partial_\mu. \quad (2.76)$$

Ricci 旋转系数,现在称为**自旋系数**,也重新定义一组符号标记

$$\begin{aligned} \kappa &= \gamma_{311}, & \rho &= \gamma_{314}, & \epsilon &= \frac{1}{2}(\gamma_{211} + \gamma_{341}), \\ \sigma &= \gamma_{313}, & \mu &= \gamma_{243}, & \gamma &= \frac{1}{2}(\gamma_{212} + \gamma_{342}), \\ \lambda &= \gamma_{244}, & \tau &= \gamma_{312}, & \alpha &= \frac{1}{2}(\gamma_{214} + \gamma_{344}), \\ \nu &= \gamma_{242}, & \pi &= \gamma_{241}, & \beta &= \frac{1}{2}(\gamma_{213} + \gamma_{343}). \end{aligned} \quad (2.77)$$

我们从自旋系数的定义可以看出,任何量的共轭复数可以通过把所有的指标 4 置换为指标 3,把指标 3 置换为指标 4 得到,如  $\bar{\kappa} = \gamma_{411}$ ,  $\bar{\rho} = \gamma_{413}$ 。

### 3.3.2 NP 标架下 Weyl, Ricci, Riemann 张量的表示

外尔张量是黎曼张量的无迹部分,其在 NP 标架下的分量为

$$C_{abcd} = R_{abcd} + \frac{1}{2}(\eta_{ac}R_{bd} - \eta_{bc}R_{ad} - \eta_{ad}R_{bc} + \eta_{bd}R_{ac}) - \frac{1}{6}(\eta_{ac}\eta_{bd} - \eta_{ad}\eta_{bc})R. \quad (2.78)$$

其中  $R_{bd}$  标记里奇张量的标架分量,  $R$  为曲率标量:

$$R_{ac} = \eta^{bd}R_{abcd} \quad R = \eta^{ab}R_{ab} = 2(R_{12} - R_{34}). \quad (2.79)$$

$C_{abcd}$  无迹的事实要求

$$\eta^{ab}C_{abcd} = C_{1bc2} + C_{2bc1} - C_{3bc4} - C_{4bc3} = 0. \quad (2.80)$$

此外，还有指标轮换的对称性

$$C_{abcd} + C_{adbc} + C_{acdb} = 0. \quad (2.81)$$

其中(2.80)式对  $b = c$  给出

$$C_{1314} = C_{2324} = C_{1332} = C_{1442} = 0. \quad (2.82)$$

而当  $b \neq c$  时(2.80)式与(2.81)式一起给出

$$\begin{aligned} C_{1231} = C_{1334}, \quad C_{1241} = C_{1443}, \quad C_{1232} = C_{2343}, \quad C_{1242} = C_{2434}, \\ C_{1212} = C_{3434}, \quad C_{1342} = \frac{1}{2}(C_{1212} - C_{1234}) = \frac{1}{2}(C_{3434} - C_{1234}). \end{aligned} \quad (2.83)$$

运用(2.80)式和(2.81)式，我们还可以得到 Weyl 张量的一些分量为零，如  $C_{1314} = 0$ ，证明如下：在(2.80)式中取  $b = c = 1$ ，在(2.80)式中取  $a = b = c = 1, d = 2$  得

$$C_{1112} + C_{2111} - C_{3114} - C_{4113} = 0, \quad (2.84)$$

$$C_{1112} + C_{1121} + C_{1211} = 0.$$

利用 Weyl 张量的 1,2 指标反对称，3,4 指标反对称，12,34 指标对称

$$C_{abcd} = -C_{bacd} \quad C_{abcd} = -C_{abdc} \quad C_{abcd} = C_{cdab}. \quad (2.85)$$

我们可以得到

$$C_{1112} + C_{1121} + C_{1211} = C_{1112} - C_{1112} + C_{1211} = C_{1211} = 0. \quad (2.86)$$

所以

$$C_{1211} = C_{2111} = C_{1112} = C_{1121} = 0. \quad (2.87)$$

代入(2.84)第一式得

$$-C_{3114} - C_{4113} = C_{1314} + C_{1314} = 2C_{1314} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_{1314} = 0. \quad (2.88)$$

接着推导  $C_{1231} = C_{1334}$  如下：

$$\begin{aligned} C_{1132} + C_{2131} - C_{3134} - C_{4133} &= 0, \\ C_{3211} + C_{3121} + C_{3112} &= C_{3211} = 0, \\ C_{4133} + C_{4313} + C_{4331} &= C_{4133} = 0, \\ \Rightarrow C_{2131} &= C_{3134}, \\ \Rightarrow C_{1231} &= C_{1334}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

利用以上结果，得出 Riemann 张量的各分量通过下式与 Weyl 和 Ricci 张量的分量关联

$$\begin{aligned}
R_{1212} &= C_{1212} + R_{12} - \frac{1}{6}R, & R_{1314} &= \frac{1}{2}R_{11}, & R_{2324} &= \frac{1}{2}R_{22}, & R_{3132} &= -\frac{1}{2}R_{33} \\
R_{3434} &= C_{3434} - R_{34} - \frac{1}{6}R, & R_{1313} &= C_{1313}, & R_{2323} &= C_{2323}, & R_{1234} &= C_{1234}, \\
R_{1334} &= C_{1334} + \frac{1}{2}R_{13}, & R_{1324} &= C_{1324} + \frac{1}{12}R, & R_{1213} &= C_{1213} + \frac{1}{2}R_{13}, \\
R_{1223} &= C_{1223} - \frac{1}{2}R_{23}, & R_{2334} &= C_{2334} + \frac{1}{2}R_{23}.
\end{aligned} \tag{2.90}$$

而附加的复共轭关系可由指标 4 置换指标 3 得到，反之亦然。在 NP 标架下，Weyl 张量的 10 个独立分量由下列 5 个复数标量表示

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= -C_{1313} = -C_{pqrs}l^p m^q l^r m^s, \\
\Psi_1 &= -C_{1213} = -C_{pqrs}l^p n^q l^r m^s, \\
\Psi_2 &= -C_{1342} = -C_{pqrs}l^p m^q \bar{m}^r n^s, \\
\Psi_3 &= -C_{1242} = -C_{pqrs}l^p n^q \bar{m}^r n^s, \\
\Psi_4 &= -C_{2424} = -C_{pqrs}n^p \bar{m}^q n^r \bar{m}^s.
\end{aligned} \tag{2.91}$$

虽然一般而言很清楚 Weyl 张量是由 5 个复数标量  $\Psi_0, \dots, \Psi_4$  完全确定，但更方便的是有一个总公式来用 5 个标量表示外尔张量的不同分量。

$$\begin{aligned}
C_{pqrs} &= -(\Psi_2 + \bar{\Psi}_2)[\{l_p n_q l_r n_s\} + \{m_p \bar{m}_q m_r \bar{m}_s\}] + (\Psi_2 - \bar{\Psi}_2)\{l_p n_q m_r \bar{m}_s\} \\
&\quad + [-\Psi_0\{n_p \bar{m}_q n_r \bar{m}_s\} - \Psi_4\{l_p m_q l_r m_s\} + \Psi_2\{l_p m_q n_r \bar{m}_s\} \\
&\quad - \Psi_1[\{l_p n_q n_r \bar{m}_s\} + \{n_p \bar{m}_q \bar{m}_r m_s\}] \\
&\quad + \Psi_3[\{l_p n_q l_r m_s\} - \{l_p m_q m_r \bar{m}_s\}] + c.c.].
\end{aligned} \tag{2.92}$$

特别地有

$$C_{1334} = \Psi_1, \quad C_{2443} = \Psi_3, \quad C_{1212} = C_{3434} = -(\Psi_2 + \bar{\Psi}_2), \quad C_{1234} = (\Psi_2 - \bar{\Psi}_2). \tag{2.93}$$

最后，Ricci 张量的 10 个分量可由下列 4 个实数标量和 3 个复数标量给定

$$\begin{aligned}
\Phi_{00} &= -\frac{1}{2}R_{11}, & \Phi_{22} &= -\frac{1}{2}R_{22}, & \Phi_{02} &= -\frac{1}{2}R_{33}, & \Phi_{20} &= -\frac{1}{2}R_{44}, \\
\Phi_{11} &= -\frac{1}{4}(R_{12} + R_{34}), & \Phi_{01} &= -\frac{1}{2}R_{13}, & \Phi_{10} &= -\frac{1}{2}R_{14}, \\
\Lambda &= \frac{1}{24}R = \frac{1}{12}(R_{12} - R_{34}), & \Phi_{12} &= -\frac{1}{2}R_{23}, & \Phi_{21} &= -\frac{1}{2}R_{24},
\end{aligned} \tag{2.94}$$

其中  $\Phi_{00}, \Phi_{11}, \Phi_{22}, \Lambda$  为实数， $\Phi_{01}, \Phi_{10}$  互为复共轭， $\Phi_{02}, \Phi_{20}$  互为复共轭， $\Phi_{12}, \Phi_{21}$  互为复共轭。

### 3.3.3 NP 标架下的转换关系和结构常数

现在来写出 NP 标架下的各个方程的明确形式。首先考虑转换关系

$$[\mathbf{e}_{(a)}, \mathbf{e}_{(b)}] = (\gamma_{cba} - \gamma_{cab})\mathbf{e}^c = C_{ab}^c \mathbf{e}_c. \quad (2.95)$$

例如

$$\begin{aligned} [\Delta, D] &= [\mathbf{n}, \mathbf{l}] = [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1] = (\gamma_{c12} - \gamma_{c21})\mathbf{e}^c \\ &= -\gamma_{121}\mathbf{e}^1 + \gamma_{212}\mathbf{e}^2 + (\gamma_{312} - \gamma_{321})\mathbf{e}^3 + (\gamma_{412} - \gamma_{421})\mathbf{e}^4 \\ &= -\gamma_{121}\Delta + \gamma_{212}D - (\gamma_{312} - \gamma_{321})\bar{\delta} - (\gamma_{412} - \gamma_{421})\delta. \end{aligned} \quad (2.96)$$

或用我们在(2.77)式定义的自旋系数的符号得到

$$\Delta D - D\Delta = (\gamma + \bar{\gamma})D + (\epsilon + \bar{\epsilon})\Delta - (\bar{\tau} + \pi)\delta - (\tau + \bar{\pi})\bar{\delta}. \quad (2.97)$$

类似地, 可得

$$\begin{aligned} \delta D - D\delta &= (\bar{\alpha} + \beta + \bar{\pi})D + \kappa\Delta - (\bar{\rho} + \epsilon - \bar{\epsilon})\delta - \sigma\bar{\delta}, \\ \delta\Delta - \Delta\delta &= -\bar{\nu}D + (\tau - \bar{\alpha} - \beta)\Delta + (\mu - \gamma - \bar{\gamma})\delta + \bar{\lambda}\bar{\delta}, \\ \bar{\delta}\delta - \delta\bar{\delta} &= (\bar{\mu} - \mu)D + (\bar{\rho} - \rho)\Delta + (\alpha + \bar{\beta})\delta + (\beta - \bar{\alpha})\bar{\delta}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

结构常数与自旋系数的关系如下:

$$\begin{aligned} C^1_{21} &= +(\gamma + \bar{\gamma}), & C^1_{31} &= +(\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi}), & C^1_{32} &= -\bar{\nu}, & C^1_{43} &= \bar{\mu} - \mu, \\ C^2_{21} &= +(\epsilon + \bar{\epsilon}), & C^2_{31} &= +\kappa, & C^2_{32} &= \tau - \bar{\alpha} - \beta, & C^2_{43} &= \bar{\rho} - \rho, \\ C^3_{21} &= -(\bar{\tau} + \pi), & C^3_{31} &= -(\bar{\rho} - \epsilon + \bar{\epsilon}), & C^3_{32} &= \mu - \gamma - \bar{\gamma}, & C^3_{43} &= \alpha - \bar{\beta}, \\ C^4_{21} &= -(\tau + \bar{\pi}), & C^4_{31} &= -\sigma, & C^4_{32} &= +\bar{\lambda}, & C^4_{43} &= \beta - \bar{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

### 3.3.4 NP 标架下的 Ricci 恒等式和消元关系

现在来写出 Ricci 恒等式在 NP 标架中的表示。例如, 考虑(2.68)式的 (1313) 分量, 有 (用关系(2.90))

$$\begin{aligned}
-\Psi_0 &= -C_{1313} = R_{1313} \\
&= \gamma_{133,1} - \gamma_{131,3} \\
&\quad + \gamma_{311}(\gamma_1^1{}_3 - \gamma_3^1{}_1) + \gamma_{312}(\gamma_1^2{}_3 - \gamma_3^2{}_1) \\
&\quad + \gamma_{313}(\gamma_1^3{}_3 - \gamma_3^3{}_1) + \gamma_{314}(\gamma_1^4{}_3 - \gamma_3^4{}_1) \\
&\quad + \gamma_{111}\gamma_3^1{}_3 + \gamma_{211}\gamma_3^2{}_3 + \gamma_{311}\gamma_3^3{}_3 + \gamma_{411}\gamma_3^4{}_3 \\
&\quad - \gamma_{113}\gamma_3^1{}_1 - \gamma_{213}\gamma_3^2{}_1 - \gamma_{313}\gamma_3^3{}_1 - \gamma_{413}\gamma_3^4{}_1 \\
&= \gamma_{133,1} - \gamma_{131,3} \\
&\quad + \gamma_{311}(\gamma_{123} - \gamma_{321}) + \gamma_{312}(\gamma_{113} - \gamma_{311}) \\
&\quad + \gamma_{313}(-\gamma_{143} + \gamma_{341}) + \gamma_{314}(-\gamma_{133} + \gamma_{331}) \\
&\quad + \gamma_{411}\gamma_{323} + \gamma_{211}\gamma_{313} - \gamma_{311}\gamma_{343} - \gamma_{411}\gamma_{333} \\
&\quad - \gamma_{413}\gamma_{321} - \gamma_{213}\gamma_{311} + \gamma_{313}\gamma_{341} + \gamma_{413}\gamma_{331} \\
&= \gamma_{133,1} - \gamma_{131,3} \\
&\quad + \gamma_{311}(\gamma_{123} - \gamma_{321} - \gamma_{312} - \gamma_{343} - \gamma_{213}) \\
&\quad + \gamma_{313}(-\gamma_{143} + \gamma_{341} - \gamma_{314} + \gamma_{211} + \gamma_{341}).
\end{aligned} \tag{2.100}$$

将方向导数和自旋系数代之以其指定符号得

$$D\sigma - \delta\kappa = \sigma(3\epsilon - \bar{\epsilon} + \rho + \bar{\rho}) + \kappa(\bar{\pi} - \tau - 3\beta - \bar{\alpha}) + \Psi_0. \tag{2.101}$$

(2.68)式共有 36 个, 但是在 NP 标架中, 只写出半数的方程就够了 (剩下一半是其复共轭)。

下面列出最初由 Newman 和 Penrose 于 1962 年导出的 18 个方程 [97]:

$$D\rho - \bar{\delta}\kappa = (\rho^2 + \sigma\bar{\sigma}) + \rho(\epsilon + \bar{\epsilon}) - \bar{\kappa}\tau - \kappa(3\alpha + \bar{\beta} - \pi) + \Phi_{00}, \tag{2.102a}$$

$$D\sigma - \delta\kappa = \sigma(\rho + \bar{\rho} + 3\epsilon - \bar{\epsilon}) - \kappa(\tau - \bar{\pi} + \bar{\alpha} + 3\beta) + \Psi_0, \tag{2.102b}$$

$$D\tau - \Delta\kappa = \rho(\tau + \bar{\pi}) + \sigma(\bar{\tau} + \pi) + \tau(\epsilon - \bar{\epsilon}) - \kappa(3\gamma + \bar{\gamma}) + \Psi_1 + \Phi_{01}, \tag{2.102c}$$

$$D\alpha - \bar{\delta}\epsilon = \alpha(\phi + \bar{\epsilon} - 2\epsilon) + \beta\bar{\sigma} - \bar{\beta}\epsilon - \kappa\lambda - \bar{\kappa}\gamma + \pi(\epsilon + \rho) + \Phi_{10}, \tag{2.102d}$$

$$D\beta - \delta\epsilon = \sigma(\alpha + \pi) + \beta(\bar{\rho} - \bar{\epsilon}) - \kappa(\mu + \gamma) - \epsilon(\bar{\alpha} - \bar{\pi}) + \Psi_1, \tag{2.102e}$$

$$D\gamma - \Delta\epsilon = \alpha(\tau + \bar{\pi}) + \beta(\bar{\tau} + \pi) - \gamma(\epsilon + \bar{\epsilon}) - \epsilon(\gamma + \bar{\gamma}) + \tau\pi - \nu\kappa + \Psi_2 + \Phi_{11} - \Lambda, \tag{2.102f}$$

$$D\lambda - \bar{\delta}\pi = (\rho\lambda + \bar{\sigma}\mu) + \pi(\pi + \alpha - \beta) - \nu\bar{\kappa} - \lambda(3\epsilon - \bar{\epsilon}) + \Phi_{20}, \quad (2.102g)$$

$$D\mu - \delta\pi = (\bar{\pi}\mu + \sigma\lambda) + \pi(\bar{\pi} - \bar{\alpha} + \beta) - \mu(\epsilon + \bar{\epsilon}) - \nu\kappa + \Psi_2 + 2\Lambda, \quad (2.102h)$$

$$D\nu - \Delta\pi = \mu(\pi + \bar{\tau}) + \lambda(\bar{\pi} + \tau) + \pi(\gamma - \bar{\gamma}) - \nu(3\epsilon + \bar{\epsilon}) + \Psi_3 + \Phi_{21}, \quad (2.102i)$$

$$\Delta\lambda - \bar{\delta}\nu = -\lambda(\mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma}) + \nu(3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau}) - \Psi_4, \quad (2.102j)$$

$$\delta\rho - \bar{\delta}\sigma = \rho(\bar{\alpha} + \beta) - \sigma(3\alpha - \bar{\beta}) + \tau(\rho - \bar{\rho}) + \kappa(\mu - \bar{\mu}) - \Psi_1 + \Phi_{01}, \quad (2.102k)$$

$$\delta\alpha - \bar{\delta}\beta = (\mu\rho - \alpha\sigma) + \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - 2\alpha\beta + \gamma(\rho - \bar{\rho}) - \Psi_2 + \Phi_{11} + \Lambda, \quad (2.102l)$$

$$\delta\lambda - \bar{\delta}\mu = \nu(\rho - \bar{\rho}) + \pi(\mu - \bar{\mu}) + \mu(\alpha + \bar{\beta}) + \lambda(\bar{\alpha} - 3\beta) + \Psi_3 + \Phi_{21}, \quad (2.102m)$$

$$\delta\nu - \Delta\mu = (\mu^2 + \lambda\bar{\lambda}) + \mu(\gamma + \bar{\gamma}) - \bar{\nu}\pi + \nu(\tau - 3\beta - \bar{\alpha}) + \Phi_{22}, \quad (2.102n)$$

$$\delta\gamma - \Delta\beta = \gamma(\tau - \bar{\alpha} - \beta) + \mu\tau - \sigma\nu - \epsilon\bar{\nu} - \beta(\gamma - \bar{\gamma} - \mu) + \alpha\bar{\lambda} + \Phi_{12}, \quad (2.102o)$$

$$\delta\tau - \Delta\sigma = (\mu\sigma + \bar{\lambda}\rho) + \tau(\tau + \beta - \bar{\alpha}) - \sigma(3\gamma - \bar{\gamma}) - \kappa\bar{\nu} + \Phi_{02}, \quad (2.102p)$$

$$\Delta\rho - \bar{\delta}\tau = -(\rho\bar{\mu} + \sigma\lambda) + \tau(\bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau}) + \rho(\gamma + \bar{\gamma}) + \nu\kappa - \Psi_2 - 2\Lambda, \quad (2.102q)$$

$$\Delta\alpha - \bar{\delta}\gamma = \nu(\rho + \epsilon) - \lambda(\tau + \beta) + \alpha(\bar{\gamma} - \bar{\mu}) + \gamma(\bar{\beta} - \bar{\tau}) - \Psi_3. \quad (2.102r)$$

它们分别来自 Riemann 张量分量  $R_{1314}$ ,  $R_{1313}$ ,  $R_{1312}$ ,  $(R_{3414} - R_{1214})/2$ ,  $(R_{1213} - R_{3413})/2$ ,  $(R_{1212} - R_{3412})/2$ ,  $R_{2441}$ ,  $R_{2431}$ ,  $R_{2421}$ ,  $R_{2442}$ ,  $R_{3143}$ ,  $(R_{1234} - R_{3434})/2$ ,  $R_{2443}$ ,  $R_{2423}$ ,  $(R_{1232} - R_{3432})/2$ ,  $R_{1332}$ ,  $R_{1324}$  和  $(R_{1242} - R_{3442})/2$ 。虽然上面的每一个方程都含有一个或多个 Weyl 和 Ricci 标量, 但通过相互消元可以得到 16 个独立于它们并且只含自旋系数的实数方程。理由是, 虽然方程(2.68)的右边第一对 (ab) 和第二对 (cd) 指标是反对称的, 但却不具有 Riemann 张量 (左边) 对第一和第二对指标同时互换的不变性。恰恰是这后一个不变性 (和循环恒等式一起) 将 Riemann 张量的独立分量个数从 36 减为 20。同样的理由, 必定能够从包含在(2.68)式里的 36 个方程中的总共 16 个里消除黎曼张量。这种消除能从上列方程直接进行。于是方程(2.102a)的虚部就不含  $\Phi_{00}$ , 因为它是实数。类似地, 由方程(2.102c)(2.102e), 以及方程(2.102d)的复共轭, 容易消除  $\Psi_1$  和  $\Phi_{10}(= \bar{\Phi}_{01})$ , 并得到单一的只含有自旋系数的复数方程。通过这样系统的消除, 得到下列 4 个实数和 6 个复数消元关系:

$$D(\rho - \bar{\rho}) + \delta\bar{\kappa} - \bar{\delta}\kappa = (\rho - \bar{\rho})(\rho + \bar{\rho} + \epsilon + \bar{\epsilon}) + \kappa(\bar{\tau} + \pi - 3\alpha - \bar{\beta}) - \bar{\kappa}(\tau + \bar{\pi} - 3\bar{\alpha} - \beta), \quad (2.103a)$$

$$D(\mu - \bar{\mu}) + \delta(\alpha + \bar{\beta} - \pi) - \bar{\delta}(\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi}) = (\gamma + \bar{\gamma})(\rho - \bar{\rho}) + \alpha(\bar{\pi} - 2\beta) - \bar{\alpha}(\pi - 2\bar{\beta}) + \bar{\kappa}\bar{\nu} - \kappa\nu + \beta\pi - \bar{\beta}\bar{\pi} + (\rho + \bar{\rho})(\mu - \bar{\mu}), \quad (2.103b)$$

$$D(\mu - \bar{\mu} - \gamma + \bar{\gamma}) + \Delta(\epsilon - \bar{\epsilon}) - \delta\pi + \bar{\delta}\bar{\pi} = (\epsilon + \bar{\epsilon})(\bar{\mu} - \mu) + \bar{\tau}(\bar{\alpha} + \bar{\pi} - \beta) - \tau(\alpha + \pi - \bar{\beta}) + \lambda\sigma - \bar{\lambda}\bar{\sigma} + \bar{\rho}\mu - \rho\bar{\mu} + 2(\epsilon\gamma - \bar{\epsilon}\bar{\gamma}), \quad (2.103c)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\bar{\mu} - \mu) + \delta\nu - \bar{\delta}\bar{\nu} &= (\mu - \bar{\mu})(\mu + \bar{\mu} + \gamma + \bar{\gamma}) + \nu(\tau - 3\beta - \bar{\alpha} + \bar{\pi}) \\ &\quad - \bar{\nu}(\bar{\tau} + \pi - 3\bar{\beta} - \alpha), \end{aligned} \quad (2.103d)$$

$$\begin{aligned} D(\tau - \bar{\alpha} - \beta) - \Delta\kappa + \delta(\epsilon + \bar{\epsilon}) &= \rho(\bar{\tau} + \pi) + \bar{\kappa}\bar{\lambda} + \sigma(\bar{\tau} - \alpha - \bar{\beta}) + \epsilon(\tau - \bar{\pi}) \\ &\quad - \bar{\rho}(\beta + \bar{\alpha} + \bar{\pi}) + \bar{\epsilon}(2\bar{\alpha} + 2\beta - \tau - \bar{\pi}) + \kappa(\mu - 2\gamma), \end{aligned} \quad (2.103e)$$

$$\begin{aligned} \delta(\rho - \epsilon + \bar{\epsilon}) - \bar{\delta}\sigma + D(\beta - \bar{\alpha}) &= \rho(\bar{\alpha} + \beta + \tau) - \bar{\rho}(\tau - \beta + \bar{\alpha} + \bar{\pi}) + (\bar{\epsilon} - \epsilon)(2\bar{\alpha} - \bar{\pi}) \\ &\quad + \sigma(\pi - 2\alpha) + \kappa(\bar{\gamma} - \gamma - \bar{\mu}) + \bar{\kappa}\bar{\lambda}, \end{aligned} \quad (2.103f)$$

$$\begin{aligned} D\lambda + \Delta\bar{\sigma} - \bar{\sigma}(\bar{\tau} + \pi) &= \bar{\sigma}(3\bar{\gamma} - \gamma + \mu - \bar{\mu}) + (\pi + \bar{\tau})(\pi - \bar{\tau} + \alpha) \\ &\quad + \lambda(\rho - \bar{\rho} - 3\epsilon + \bar{\epsilon}) - \beta\pi - \bar{\tau}\bar{\beta}, \end{aligned} \quad (2.103g)$$

$$\begin{aligned} D\nu + \Delta(\alpha + \bar{\beta} - \pi) - \bar{\delta}(\gamma + \bar{\gamma}) &= \nu(\rho - 2\epsilon) + \lambda(\bar{\pi} - \bar{\alpha} - \beta) + \mu(\pi + \bar{\tau}) - \bar{\mu}(\alpha + \bar{\beta} \\ &\quad + \bar{\tau}) + \gamma(\pi - \bar{\tau}) + \bar{\gamma}(2\alpha + 2\bar{\beta} - \pi - \bar{\tau}) + \bar{\sigma}\bar{\nu}, \end{aligned} \quad (2.103h)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\bar{\beta} - \alpha) + \delta\lambda + \bar{\delta}(\gamma - \bar{\gamma} - \mu) &= \nu(\bar{\epsilon} - \epsilon - \bar{\rho}) + \lambda(\tau - 2\beta) + \alpha(\mu + \bar{\mu}) - \bar{\mu}(\pi + \bar{\tau} \\ &\quad + \bar{\beta}) + \mu(\pi + \bar{\beta}) + (\gamma - \bar{\gamma})(\bar{\tau} - 2\bar{\beta}) + \bar{\sigma}\bar{\nu}, \end{aligned} \quad (2.103i)$$

$$\begin{aligned} D\mu + \Delta\rho - \delta\pi - \bar{\delta}\tau &= \bar{\rho}\mu - \rho\bar{\mu} + \pi(\bar{\pi} - \bar{\alpha} + \beta) + \tau(\bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau}) + \rho(\gamma + \bar{\gamma}) - \mu(\epsilon + \bar{\epsilon}). \end{aligned} \quad (2.103j)$$

### 3.3.5 NP 标架下的 Bianchi 恒等式

总共有 20 个线性独立的 Bianchi 恒等式。完整的是 8 个复数循环恒等式和 Einstein 张量无散给出的 4 个实数恒等式

$$\begin{aligned} R_{13[13|4]} &= 0, & R_{13[21|4]} &= 0, & R_{13[13|2]} &= 0, & R_{13[43|2]} &= 0, \\ R_{42[13|4]} &= 0, & R_{42[21|4]} &= 0, & R_{42[13|2]} &= 0, & R_{42[43|2]} &= 0, \\ \eta^{bc} \left( R_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} R \right)_{|c} &= 0. \end{aligned} \quad (2.104)$$

最后一个式子给出两个实数方程

$$R_{11|2} + R_{34|1} - R_{13|4} - R_{14|3} = 0, \quad (2.105)$$

$$R_{22|1} + R_{34|2} - R_{23|4} - R_{24|3} = 0,$$

以及一个复数方程

$$R_{33|4} + R_{12|3} - R_{31|2} - R_{32|1} = 0. \quad (2.106)$$

现在用自旋系数和 Weyl, Ricci 标量写出这些恒等式在 NP 标架下的投影, 作为例子, 考虑(2.104)式所列恒等式的第一个, 有

$$R_{1313|4} + R_{1334|1} + R_{1341|3} = 0. \quad (2.107)$$

利用(2.90)式中给出的关系, 另可写出

$$C_{1313|4} + \left( C_{1334} + \frac{1}{2} R_{13} \right)_{|1} - \frac{1}{2} R_{11|3} = 0. \quad (2.108)$$

考虑 Weyl 张量中的项

$$\begin{aligned} C_{1313|4} &= C_{1313,4} - \eta^{nm} (\gamma_{n14} C_{m313} + \gamma_{n34} C_{1m13} + \gamma_{n14} C_{13m3} + \gamma_{n34} C_{131m}) \\ &= C_{1313,4} - 2(\gamma_{214} + \gamma_{344}) C_{1313} + 2\gamma_{314} (C_{1213} + C_{4313}) \\ &= -\bar{\delta} \Psi_0 + 4\alpha \Psi_0 - 4\rho \Psi_1, \end{aligned} \quad (2.109)$$

和

$$\begin{aligned} C_{1334|1} &= C_{1334,1} - \eta^{nm} [\gamma_{n11} C_{m334} + \gamma_{n31} (C_{1m34} + C_{13m4}) + \gamma_{n41} C_{133m}] \\ &= C_{1334,1} - [(\gamma_{211} + \gamma_{341}) C_{1334} + \gamma_{131} (C_{1234} - C_{3434}) + \gamma_{231} C_{1314} \\ &\quad + \gamma_{141} C_{1332} + \gamma_{131} C_{1324} + \gamma_{241} C_{1331}] \\ &= D \Psi_1 - 2\epsilon \Psi_1 + 3\kappa \Psi_2 - \pi \Psi_0. \end{aligned} \quad (2.110)$$

类似地可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (R_{13|1} - R_{11|3}) &= -D \Phi_{01} + \delta \Phi_{00} + 2(\epsilon + \bar{\rho}) \Phi_{01} + 2\sigma \Phi_{10} \\ &\quad - 2\kappa \Phi_{11} - \bar{\kappa} \Phi_{02} + (\bar{\pi} - 2\bar{\alpha} - 2\beta) \Phi_{00}. \end{aligned} \quad (2.111)$$

将(2.109)式,(2.110)式和(2.111)式结合, 就得到所需的恒等式(2.107)的标架表示。对其余的恒等式也可以类似地操作。下面给出 8 个复数等式(2.104)的标架表示 (第一行是原始的循环恒等式, Weyl 部分; 第二行是 Ricci 部分):

$$\mathbf{R}_{13[13|4]} = \mathbf{0}: \quad -\bar{\delta} \Psi_0 + D \Psi_1 + (4\alpha - \pi) \Psi_0 - 2(2\rho + \epsilon) \Psi_1 + 3\kappa \Psi_2 \quad (2.112a)$$

$$-D \Phi_{01} + \delta \Phi_{00} + 2(\epsilon + \bar{\rho}) \Phi_{01} + 2\sigma \Phi_{10} - 2\kappa \Phi_{11} - \bar{\kappa} \Phi_{02} + (\bar{\pi} - 2\bar{\alpha} - 2\beta) \Phi_{00} = 0,$$

$$\mathbf{R}_{13[21|4]} = \mathbf{0}: \quad +\bar{\delta} \Psi_1 - D \Psi_2 - \lambda \Psi_0 + 2(\pi - \alpha) \Psi_1 + 3\rho \Psi_2 - 2\kappa \Psi_3 \quad (2.112b)$$

$$+\bar{\delta} \Phi_{01} - \Delta \Phi_{00} - 2(\alpha + \bar{\tau}) \Phi_{01} + 2\rho \Phi_{11} + \bar{\sigma} \Phi_{02} - (\bar{\mu} - 2\gamma - 2\bar{\gamma}) \Phi_{00} - 2\tau \Phi_{10} - 2D\Lambda = 0,$$

$$\mathbf{R}_{42[13|4]} = \mathbf{0}: \quad -\bar{\delta} \Psi_2 + D \Psi_3 + 2\lambda \Psi_1 - 3\pi \Psi_2 + 2(\epsilon - \rho) \Psi_3 + \kappa \Psi_4 \quad (2.112c)$$

$$-D \Phi_{21} + \delta \Phi_{20} + 2(\bar{\rho} - \epsilon) \Phi_{21} - 2\mu \Phi_{10} + 2\pi \Phi_{11} - \bar{\kappa} \Phi_{22} - (2\bar{\alpha} - 2\beta - \bar{\pi}) \Phi_{20} - \bar{\delta} \Lambda = 0,$$

$$\mathbf{R}_{42[21|4]} = \mathbf{0}: \quad +\bar{\delta} \Psi_3 - D \Psi_4 - 3\lambda \Psi_2 + 2(2\pi + \alpha) \Psi_3 - (4\epsilon - \rho) \Psi_4 \quad (2.112d)$$

$$-\Delta \Phi_{20} + \bar{\delta} \Phi_{21} + 2(\alpha - \bar{\tau}) \Phi_{21} + 2\nu \Phi_{10} + \bar{\sigma} \Phi_{22} - 2\lambda \Phi_{11} - (\bar{\mu} + 2\gamma - 2\bar{\gamma}) \Phi_{20} = 0,$$

$$\mathbf{R}_{13[13|2]} = \mathbf{0}: \quad -\Delta \Psi_0 + \delta \Psi_1 + (4\gamma - \mu) \Psi_0 - 2(2\tau + \beta) \Psi_1 + 3\sigma \Psi_2 \quad (2.112e)$$

$$-D \Phi_{02} + \delta \Phi_{01} + 2(\bar{\pi} - \beta) \Phi_{01} - 2\kappa \Phi_{12} - \bar{\lambda} \Phi_{00} + 2\sigma \Phi_{11} + (\bar{\rho} + 2\epsilon - 2\bar{\epsilon}) \Phi_{02} = 0,$$

$$\mathbf{R}_{13[43|2]} = 0 : \quad -\Delta\Psi_1 + \delta\Psi_2 + \nu\Psi_0 + 2(\gamma - \mu)\Psi_1 - 3\tau\Psi_2 + 2\sigma\Psi_3 \quad (2.112f)$$

$$+ \Delta\Phi_{01} - \bar{\delta}\Phi_{02} + 2(\bar{\mu} - \gamma)\Phi_{01} - 2\rho\Phi_{12} - \bar{\nu}\Phi_{00} + 2\tau\Phi_{11} + (\bar{\tau} - 2\bar{\beta} + 2\alpha)\Phi_{02} + 2\delta\Lambda = 0,$$

$$\mathbf{R}_{42[13|2]} = 0 : \quad -\Delta\Psi_2 + \delta\Psi_3 + 2\nu\Psi_1 - 3\mu\Psi_2 + 2(\beta - \tau)\Psi_3 + \sigma\Psi_4 \quad (2.112g)$$

$$- D\Phi_{22} + \delta\Phi_{21} + 2(\bar{\pi} + \beta)\Phi_{21} - 2\mu\Phi_{11} - \bar{\lambda}\Phi_{20} + 2\pi\Phi_{12} + (\bar{\rho} - 2\epsilon - 2\bar{\epsilon})\Phi_{22} - 2\Delta\Lambda = 0,$$

$$\mathbf{R}_{42[43|2]} = 0 : \quad -\Delta\Psi_3 + \delta\Psi_4 + 3\nu\Psi_2 - 2(\gamma + 2\mu)\Psi_3 - (\tau - 4\beta)\Psi_4 \quad (2.112h)$$

$$+ \Delta\Phi_{21} - \bar{\delta}\Phi_{22} + 2(\bar{\mu} + \gamma)\Phi_{21} - 2\nu\Phi_{11} - \bar{\nu}\Phi_{20} + 2\lambda\Phi_{12} + (\bar{\tau} - 2\alpha - 2\bar{\beta})\Phi_{22} = 0.$$

散度的恒等式(2.105),(2.106)的标架形式为:

$$\begin{aligned} & \bar{\delta}\Phi_{01} + \delta\Phi_{10} - D(\Phi_{11} + 3\Lambda) - \Delta\Phi_{00} \\ & = \bar{\kappa}\Phi_{12} + \kappa\Phi_{21} + (2\alpha + 2\bar{\tau} - \pi)\Phi_{01} + (2\bar{\alpha} + 2\tau - \bar{\pi})\Phi_{10} \end{aligned} \quad (2.113a)$$

$$- 2(\rho + \bar{\rho})\Phi_{11} - \bar{\sigma}\Phi_{02} - \delta\Phi_{20} + [\mu + \bar{\mu} - 2(\gamma + \bar{\gamma})]\Phi_{00},$$

$$\begin{aligned} & \bar{\delta}\Phi_{12} + \delta\Phi_{21} - \Delta(\Phi_{11} + 3\Lambda) - D\Phi_{22} \\ & = -\nu\Phi_{01} - \bar{\nu}\Phi_{10} + (\bar{\tau} - 2\bar{\beta}2\pi)\Phi_{12} + (\tau - 2\beta - 2\bar{\pi})\Phi_{21} \end{aligned} \quad (2.113b)$$

$$+ 2(\mu + \bar{\mu})\Phi_{11} - (\rho + \bar{\rho} - 2\epsilon - 2\bar{\epsilon})\Phi_{22} + \lambda\Phi_{02} + \bar{\lambda}\Phi_{20},$$

$$\begin{aligned} & \delta(\Phi_{11} - 3\Lambda) - D\Phi_{12} - \Delta\Phi_{01} + \bar{\delta}\Phi_{02} \\ & = \kappa\Phi_{22} - \bar{\nu}\Phi_{00} + (\bar{\tau} - \pi + 2\alpha - 2\bar{\beta})\Phi_{02} - \sigma\Phi_{21} + \bar{\lambda}\Phi_{10} \end{aligned} \quad (2.113c)$$

$$+ 2(\tau - \bar{\pi})\Phi_{11} - (2\rho + \bar{\rho} - 2\bar{\epsilon})\Phi_{12} + (2\bar{\mu} + \mu - 2\gamma)\Phi_{01}.$$

在真空中, Ricci 标量为零, 相关的 Bianchi 恒等式由 8 个 Ricci 项等于零的复数方程(2.112)给出; 而且在这种情况下, 无需关心散度恒等式(2.113)。但是一般地, 方程(2.112)的 Ricci 项是必须包括的; 而且在这种形式里它们被代之以 Einstein 场方程

$$R_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}(T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T) = 8\pi(T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T). \quad (2.114)$$

一致的能动量张量的分量。组成 NP 标架的基本方程是转换关系(2.97), (2.98), Ricci 恒等式(2.102), 消元关系(2.103)和 Bianchi 恒等式(2.112), (2.113)。但是, 我们并不知道这些方程的目的是什么, 在什么意义上它们能代替 Einstein 场方程或与之等价。

## 4. Teukolsky 方程

### 4.1 Kerr 时空中的 Kinnersley 标架

假设引力波的传播方向为  $z$  方向, 则在无穷远处的平直时空, 可以很容易得到两个类光方向  $l^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(dt + dz), n^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(dt - dz)$ , 以及另外两个复的类光方向  $m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(dx + idy), \bar{m}^\mu =$

$\frac{1}{\sqrt{2}}(dx - idy)$ 。不难看出，它们满足正交归一关系(2.70), (2.71), (2.72)。Kerr 度规为

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - 2Mr/\Sigma) & 0 & 0 & -2Mar \sin^2 \theta/\Sigma \\ 0 & \Sigma/\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ -2Mar \sin^2 \theta/\Sigma & 0 & 0 & \sin^2 \theta (r^2 + a^2 + 2Ma^2r \sin^2 \theta/\Sigma) \end{pmatrix}, \quad (2.115)$$

其中  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ ,  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ 。注意将  $\Delta$  与(2.76)式定义的方向导数算符  $\Delta$  进行区分。取标架  $\{(a), (b), (c), (d)\}$  也为  $\{t, r, \theta, \varphi\}$ , 则

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= e_{(a)\mu} \eta^{(a)(b)} e_{(b)\nu} \\ &= \begin{pmatrix} e_{(t)t} & e_{(t)r} & e_{(t)\theta} & e_{(t)\varphi} \\ e_{(r)t} & e_{(r)r} & e_{(r)\theta} & e_{(r)\varphi} \\ e_{(\theta)t} & e_{(\theta)r} & e_{(\theta)\theta} & e_{(\theta)\varphi} \\ e_{(\varphi)t} & e_{(\varphi)r} & e_{(\varphi)\theta} & e_{(\varphi)\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{(t)t} & e_{(t)r} & e_{(t)\theta} & e_{(t)\varphi} \\ e_{(r)t} & e_{(r)r} & e_{(r)\theta} & e_{(r)\varphi} \\ e_{(\theta)t} & e_{(\theta)r} & e_{(\theta)\theta} & e_{(\theta)\varphi} \\ e_{(\varphi)t} & e_{(\varphi)r} & e_{(\varphi)\theta} & e_{(\varphi)\varphi} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.116)$$

16 个未知量，10 个方程，剩下 6 个自由度对应 Lorentz 群的自由度。我们有

$$\begin{aligned} -e_{(t)t}^2 + e_{(r)t}^2 + e_{(\theta)t}^2 + e_{(\varphi)t}^2 &= -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right), \\ -e_{(t)r}^2 + e_{(r)r}^2 + e_{(\theta)r}^2 + e_{(\varphi)r}^2 &= \frac{\Sigma}{\Delta}, \\ -e_{(t)\theta}^2 + e_{(r)\theta}^2 + e_{(\theta)\theta}^2 + e_{(\varphi)\theta}^2 &= \Sigma, \\ -e_{(t)\varphi}^2 + e_{(r)\varphi}^2 + e_{(\theta)\varphi}^2 + e_{(\varphi)\varphi}^2 &= \sin^2 \theta \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2r \sin^2 \theta}{\Sigma}\right), \\ -e_{(t)t}e_{(t)r} + e_{(r)t}e_{(r)r} + e_{(\theta)t}e_{(\theta)r} + e_{(\varphi)t}e_{(\varphi)r} &= 0, \\ -e_{(t)t}e_{(t)\theta} + e_{(r)t}e_{(r)\theta} + e_{(\theta)t}e_{(\theta)\theta} + e_{(\varphi)t}e_{(\varphi)\theta} &= 0, \\ -e_{(t)t}e_{(t)\varphi} + e_{(r)t}e_{(r)\varphi} + e_{(\theta)t}e_{(\theta)\varphi} + e_{(\varphi)t}e_{(\varphi)\varphi} &= -\frac{2Mar \sin^2 \theta}{\Sigma}, \\ -e_{(t)r}e_{(t)\theta} + e_{(r)r}e_{(r)\theta} + e_{(\theta)r}e_{(\theta)\theta} + e_{(\varphi)r}e_{(\varphi)\theta} &= 0, \\ -e_{(t)r}e_{(t)\varphi} + e_{(r)r}e_{(r)\varphi} + e_{(\theta)r}e_{(\theta)\varphi} + e_{(\varphi)r}e_{(\varphi)\varphi} &= 0, \\ -e_{(t)\theta}e_{(t)\varphi} + e_{(r)\theta}e_{(r)\varphi} + e_{(\theta)\theta}e_{(\theta)\varphi} + e_{(\varphi)\theta}e_{(\varphi)\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (2.117)$$

从 Kerr 度规中坐标之间的依赖关系，我们自然可以取

$$e_{(t)r} = e_{(t)\theta} = e_{(r)t} = e_{(r)\theta} = e_{(r)\varphi} = e_{(\theta)t} = e_{(\theta)r} = e_{(\theta)\varphi} = e_{(\varphi)r} = e_{(\varphi)\theta} = 0. \quad (2.118)$$

则上述 10 个方程化为 5 个

$$\begin{aligned}
 -e_{(t)t}^2 + e_{(\varphi)t}^2 &= \frac{2Mr}{\Sigma} - 1, \\
 e_{(r)r}^2 &= \frac{\Sigma}{\Delta}, \\
 e_{(\theta)\theta}^2 &= \Sigma, \\
 -e_{(t)\varphi}^2 + e_{(\varphi)\varphi}^2 &= \sin^2 \theta \left( r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2r \sin^2 \theta}{\Sigma} \right), \\
 -e_{(t)t}e_{(t)\varphi} + e_{(\varphi)t}e_{(\varphi)\varphi} &= -\frac{2Mar \sin^2 \theta}{\Sigma}.
 \end{aligned} \tag{2.119}$$

于是我们可以得到

$$e_{(r)r} = \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}}, \quad e_{(\theta)\theta} = \sqrt{\Sigma}. \tag{2.120}$$

剩下 4 个未知量，三个方程

$$\begin{aligned}
 -e_{(t)t}^2 + e_{(\varphi)t}^2 &= \frac{2Mr}{\Sigma} - 1 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}, \\
 -e_{(t)\varphi}^2 + e_{(\varphi)\varphi}^2 &= \sin^2 \theta \left( \Delta + \frac{2Mr(r^2 + a^2)}{\Sigma} \right), \\
 -e_{(t)t}e_{(t)\varphi} + e_{(\varphi)t}e_{(\varphi)\varphi} &= -\frac{2Mar \sin^2 \theta}{\Sigma}.
 \end{aligned} \tag{2.121}$$

通过第一个式子，我们可以设

$$e_{(t)t} = \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}, \quad e_{(\varphi)t} = -\frac{a \sin \theta}{\sqrt{\Sigma}}. \tag{2.122}$$

代入后两个式子消元得

$$\Sigma(\Sigma - 2Mr) e_{(t)\varphi}^2 - 4Mra \sin^2 \theta \sqrt{\Delta \Sigma} e_{(t)\varphi} - \Delta a^2 \sin^4 \theta (\Sigma + 2Mr) = 0. \tag{2.123}$$

解得

$$e_{(t)\varphi} = -a \sin^2 \theta \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}, \quad e_{(\varphi)\varphi} = \frac{(r^2 + a^2) \sin \theta}{\Sigma}. \tag{2.124}$$

所以

$$e_{(a)\mu} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}} & 0 & 0 & -a \sin^2 \theta \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\Sigma} & 0 \\ -\frac{a \sin \theta}{\sqrt{\Sigma}} & 0 & 0 & \frac{(r^2 + a^2) \sin \theta}{\Sigma} \end{pmatrix}, \tag{2.125}$$

或

$$\begin{aligned}
 e_{(t)} &= \left[ \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}, 0, 0, -a \sin^2 \theta \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}} \right], \\
 e_{(r)} &= \left[ 0, \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}}, 0, 0 \right], \\
 e_{(\theta)} &= [0, 0, \sqrt{\Sigma}, 0], \\
 e_{(\varphi)} &= \left[ -\frac{a \sin \theta}{\sqrt{\Sigma}}, 0, 0, \frac{(r^2 + a^2) \sin \theta}{\Sigma} \right].
 \end{aligned} \tag{2.126}$$

若引力波沿  $r$  方向传播，则两个实类光方向为

$$\begin{aligned}
 \tilde{l}_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{(t)} - e_{(r)}) = \sqrt{\frac{\Delta}{2\Sigma}} \left[ 1, -\frac{\Sigma}{\Delta}, 0, -a \sin^2 \theta \right], \\
 \tilde{n}_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{(t)} + e_{(r)}) = \sqrt{\frac{\Delta}{2\Sigma}} \left[ 1, \frac{\Sigma}{\Delta}, 0, -a \sin^2 \theta \right].
 \end{aligned} \tag{2.127}$$

另外两个复类光方向为

$$\begin{aligned}
 \tilde{m}_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{(\theta)} - ie_{(\varphi)}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -\frac{a \sin \theta}{\sqrt{\Sigma}}, 0, -i\sqrt{\Sigma}, \frac{(r^2 + a^2) \sin \theta}{\Sigma} \right], \\
 \tilde{\bar{m}}_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{(\theta)} + ie_{(\varphi)}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -\frac{a \sin \theta}{\sqrt{\Sigma}}, 0, i\sqrt{\Sigma}, \frac{(r^2 + a^2) \sin \theta}{\Sigma} \right].
 \end{aligned} \tag{2.128}$$

还有两个自由度来自伸缩变换和旋转变换

$$\begin{aligned}
 \tilde{l} &\rightarrow \frac{1}{r}l, \quad \tilde{n} \rightarrow rn \quad \Rightarrow \quad l^\mu n_\mu = 1, \\
 \tilde{m} &\rightarrow e^{i\theta}m, \quad \tilde{\bar{m}} \rightarrow e^{-i\theta}\bar{m}, \quad \Rightarrow \quad m^\mu \bar{m}_\mu = -1.
 \end{aligned} \tag{2.129}$$

Kinnersley 通过要求(2.77)中定义的 (复) 自旋系数  $\epsilon = \frac{1}{2}(\gamma_{nl} + \gamma_{m\bar{m}}) = 0$  消除了最后两个自由度 [99]，最终得到

$$l^\mu = \frac{1}{\Delta} [a^2 + r^2, \Delta, 0, a], \tag{2.130a}$$

$$n^\mu = \frac{1}{2\Sigma} [a^2 + r^2, -\Delta, 0, a], \tag{2.130b}$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)} \left[ ia \sin \theta, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta} \right], \tag{2.130c}$$

$$\bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r - ia \cos \theta)} \left[ -ia \sin \theta, 0, 1, -\frac{i}{\sin \theta} \right]. \tag{2.130d}$$

因此这组标架称为 Kerr 时空中 NP 标架的 Kinnersley 形式或直接称为 Kinnersley 标架。

## 4.2 Teukolsky 方程的推导

我们从 NP 标架下的 Einstein 场方程

$$R_{ab} = 8\pi \left( T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T \right) \quad (2.131)$$

出发。由(2.94)的定义可得

$$\begin{aligned} \Phi_{00} &= -\frac{1}{2} R_{11} = -4\pi (T_{ll} - \frac{1}{2} \eta_{11} T) = -4\pi T_{ll}, \\ \Phi_{11} &= -\frac{1}{4} (R_{12} + R_{34}) = -2\pi (T_{ln} - \frac{1}{2} \eta_{12} T + T_{m\bar{m}} + \frac{1}{2} \eta_{34} T) = -2\pi (T_{ln} + T_{m\bar{m}}), \\ \Phi_{22} &= -\frac{1}{2} R_{22} = -4\pi T_{nn}, \\ \Lambda &= \frac{1}{12} (R_{12} - R_{34}) = \frac{2}{3} \pi (T_{ln} - \frac{1}{2} \eta_{12} T - T_{m\bar{m}} + \frac{1}{2} \eta_{34} T) = \frac{2}{3} \pi (T_{ln} - T_{m\bar{m}} - 2T), \\ \Phi_{01} &= -\frac{1}{2} R_{13} = -4\pi T_{lm}, & \Phi_{10} &= -\frac{1}{2} R_{14} = -4\pi T_{l\bar{m}}, \\ \Phi_{02} &= -\frac{1}{2} R_{33} = -4\pi T_{mm}, & \Phi_{20} &= -\frac{1}{2} R_{44} = -4\pi T_{\bar{m}\bar{m}}, \\ \Phi_{12} &= -\frac{1}{2} R_{23} = -4\pi T_{nm}, & \Phi_{21} &= -\frac{1}{2} R_{24} = -4\pi T_{n\bar{m}}. \end{aligned} \quad (2.132)$$

我们将用到 Bianchi 恒等式(2.112a), (2.112e)和 Ricci 恒等式(2.102b)以及一个另外的等式

$$(\bar{\delta} - 4\alpha + \pi)\Psi_0 - (D - 4\rho - 2\epsilon)\Psi_1 - 3\kappa\Psi_2 \quad (2.133a)$$

$$= (\delta + \bar{\pi} - 2\bar{\alpha} - 2\beta)\Phi_{00} - (D - 2\epsilon - 2\bar{\rho})\Phi_{01} + 2\sigma\Phi_{10} - 2\kappa\Phi_{11} - \bar{\kappa}\Phi_{02},$$

$$(\Delta - 4\gamma + \mu)\Psi_0 - (\delta - 4\tau - 2\beta)\Psi_1 - 2\sigma\Psi_2 \quad (2.133b)$$

$$= (\delta + 2\bar{\pi} - 2\beta)\Phi_{01} - (D - 2\epsilon + 2\bar{\epsilon} - \bar{\rho})\Phi_{02} - \bar{\lambda}\Phi_{00} + 2\sigma\Phi_{11} - 2\kappa\Phi_{12},$$

$$(D - \rho - \bar{\rho} - 3\epsilon + \bar{\epsilon})\sigma - (\delta - \tau + \bar{\pi} - \bar{\alpha} - 3\beta)\kappa - \Psi_0 = 0, \quad (2.133c)$$

$$[D - (p+1)\epsilon + \bar{\epsilon} + q\rho - \bar{\rho}](\delta - p\beta + q\tau) \quad (2.133d)$$

$$= [\delta - (p+1)\beta - \bar{\alpha} + \bar{\pi} + q\tau](D - p\epsilon + q\rho),$$

其中  $p$  和  $q$  为两个任意常数, 它们来自(2.129)式中变换的自由度, 在 Kinnersley 标架中取  $p = 2$ ,  $q = -4$ , 即

$$(D - 3\epsilon + \bar{\epsilon} - 4\rho - \bar{\rho})(\delta - 2\beta - 4\tau) = (\delta - 3\beta - \bar{\alpha} + \bar{\pi} - 4\tau)(D - 2\epsilon - 4\rho). \quad (2.134)$$

利用(2.130)定义的 Kinnersley 标架可以得到  $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$ ,  $\kappa = \sigma = \nu = \lambda = 0$ , 所有的  $\Phi_{ab}$  和  $T_{ab}$  均为零, 将(2.133a), (2.133b), (2.133c)式展开到一阶, 得到

$$(\bar{\delta} - 4\alpha + \pi)^A \Psi_0^B - (D - 4\rho - 2\epsilon)^A \Psi_1^B - 3\kappa^B \Psi_2^A \quad (2.135a)$$

$$\begin{aligned}
 &= 4\pi[(\delta + \bar{\pi} - 2\bar{\alpha} - 2\beta)^A T_{ll}^B - (\mathbf{D} - 2\epsilon - 2\bar{\rho})T_{lm}^B], \\
 (\Delta - 4\gamma + \mu)^A \Psi_0^B - (\delta - 4\tau - 2\beta)^A \Psi_1^B - 3\sigma^B \Psi_2^A & \quad (2.135b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4\pi[(\delta + 2\bar{\pi} - 2\beta)^A T_{lm}^B - (\mathbf{D} - 2\epsilon + 2\bar{\epsilon} - \bar{\rho})T_{mm}^B], \\
 (\mathbf{D} - \rho - \bar{\rho} - 3\epsilon + \bar{\epsilon})^A \sigma^B - (\delta - \tau + \bar{\pi} - \bar{\alpha} - 3\beta)^A \kappa^B - \Psi_0^B &= 0, \quad (2.135c)
 \end{aligned}$$

其中 A 代表零阶，B 代表一阶，则  $A \cdot B$  为一阶， $B \cdot B$  为二阶小量，舍去。由 Bianchi 恒等式(2.112b)，(2.112f)可知，背景项的  $\Psi_2$ ，即  $\Psi_2^A$  满足

$$\mathbf{D}\Psi_2^A = 3\rho\Psi_2^A, \quad \delta\Psi_2^A = 3\tau\Psi_2^A. \quad (2.136)$$

所以将(2.135c)式两边同乘  $\Psi_2^A$  可以改写为

$$(\mathbf{D} - 3\epsilon + \bar{\epsilon} - 4\rho - \bar{\rho})\Psi_2^A \sigma^B - (\delta + \bar{\pi} - \bar{\alpha} - 3\beta - 4\tau)\Psi_2^A \kappa^B - \Psi_0^B \Psi_2^A = 0. \quad (2.137)$$

由于(2.134)式和(2.135c)式的存在，将(2.135b)式乘  $(\mathbf{D} - 3\epsilon + \bar{\epsilon} - 4\rho - \bar{\rho})$  减去(2.135a)式乘  $(\delta - 3\beta - \bar{\alpha} + \bar{\pi} - 4\tau)$  可得

$$\begin{aligned}
 &(\mathbf{D} - 3\epsilon + \bar{\epsilon} - 4\rho - \bar{\rho})^A (\Delta - 4\gamma + \mu)^A \Psi_0^B - 3(\mathbf{D} - 3\epsilon + \bar{\epsilon} - 4\rho - \bar{\rho})^A \sigma^B \Psi_2^A \\
 &- (\delta - 3\beta - \bar{\alpha} + \bar{\pi} - 4\tau)^A (\bar{\delta} - 4\alpha + \pi)^A \Psi_0^B + 3(\delta - 3\beta - \bar{\alpha} + \bar{\pi} - 4\tau)^A \kappa^B \Psi_2^A \\
 = &(\mathbf{D} - 3\epsilon + \bar{\epsilon} - 4\rho - \bar{\rho})^A (\Delta + 4\gamma + \mu)^A \Psi_0^B \\
 &- (\delta - 3\beta - \bar{\alpha} + \bar{\pi} - 4\tau)^A (\bar{\delta} - 4\alpha + \pi)^A \Psi_0^B - 3\Psi_0^B \Psi_2^A = 4\pi T_0,
 \end{aligned} \quad (2.138)$$

其中

$$\begin{aligned}
 T_0 = &(\mathbf{D} - 3\epsilon + \bar{\epsilon} - 4\rho - \bar{\rho})^A [(\delta + 2\bar{\pi} - 2\beta)^A T_{lm}^B - (\mathbf{D} - 2\epsilon + 2\bar{\epsilon} - \bar{\rho})^A T_{mm}^B] \\
 &+ (\delta + \bar{\pi} - \bar{\alpha} - 3\beta - 4\tau)^A [(\mathbf{D} - 2\epsilon - 2\bar{\rho})^A T_{lm}^B - (\delta + \bar{\pi} - 2\bar{\alpha} - 2\beta)^A T_{ll}^B],
 \end{aligned} \quad (2.139)$$

通过标架的调换

$$\mathbf{l} \leftrightarrow \mathbf{n}, \quad \mathbf{m} \leftrightarrow \bar{\mathbf{m}}, \quad (2.140)$$

可以直接写出第二个方程（我们省去所有零阶指标 A）

$$\begin{aligned}
 &[(\Delta + 3\gamma - \bar{\gamma} + 4\mu + \bar{\mu})(\mathbf{D} + 4\epsilon - \rho) \\
 &- (\bar{\delta} - \bar{\tau} + \bar{\beta} + 3\alpha + 4\pi)(\delta - \tau + 4\beta) - 3\Psi_2] \Psi_4^B = 4\pi T_4,
 \end{aligned} \quad (2.141)$$

其中

$$\begin{aligned}
 T_4 = &(\Delta + 3\gamma - \bar{\gamma} + 4\mu + \bar{\mu})[(\bar{\delta} - 2\bar{\tau} + 2\alpha)T_{n\bar{m}} - (\Delta + 2\gamma - 2\bar{\gamma} + \bar{\mu})T_{\bar{m}\bar{m}}] \\
 &+ (\bar{\delta} - \bar{\tau} + \bar{\beta} + 3\alpha + 4\pi)[(\Delta + 2\gamma + 2\bar{\mu})T_{n\bar{m}} - (\bar{\delta} - \bar{\tau} + 2\bar{\beta} + 2\alpha)T_{nn}].
 \end{aligned} \quad (2.142)$$

这就是 Teukolsky 方程中的两个引力场方程在 NP 标架下的表示。将 Kerr 度规

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 + \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\varphi - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \sin^2 \theta \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) d\varphi^2, \quad (2.143)$$

代入计算得，不为零的旋转系数为

$$\rho = -\frac{1}{r - ia \cos \theta}, \quad (2.144a)$$

$$\beta = -\frac{\bar{\rho} \cot \theta}{2\sqrt{2}} = \frac{\cot \theta}{2\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)}, \quad (2.144b)$$

$$\pi = \frac{ia\rho^2 \sin \theta}{\sqrt{2}} = \frac{ia \sin \theta}{\sqrt{2}(r - ia \cos \theta)^2}, \quad (2.144c)$$

$$\tau = -\frac{ia\rho\bar{\rho} \sin \theta}{\sqrt{2}} = -\frac{ia \sin \theta}{\sqrt{2}(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)}, \quad (2.144d)$$

$$\mu = \frac{\rho^2 \bar{\rho} \Delta}{2} = -\frac{r^2 - 2Mr + a^2}{2(r - ia \cos \theta)^2 (r + ia \cos \theta)}, \quad (2.144e)$$

$$\gamma = \mu + \rho\bar{\rho} \frac{r - M}{2} = \frac{-a^2 + Mr + ia(M - r) \cos \theta}{2(r - ia \cos \theta)^2 (r + ia \cos \theta)}, \quad (2.144f)$$

$$\alpha = \pi - \bar{\beta} = \frac{-r \cot \theta + ia(1 + \csc^2 \theta) \sin \theta}{2\sqrt{2}(r - ia \cos \theta)^2}. \quad (2.144g)$$

唯一不为零的 Weyl 标量为

$$\Psi_2 = M\rho^3 = -\frac{M}{(r - ia \cos \theta)^3}. \quad (2.145)$$

经过一系列冗长的化简可以得到 Teukolsky 方程在 Boyer-Lindquist 坐标  $(t, r, \theta, \varphi)$  下的形式 [104, 112], Teukolsky 发现不同自旋的场满足的一阶微扰方程可以统一写成如下形式:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{4Mar}{\Delta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \varphi} + \left[ \frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \\ & - \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Delta^{s+1} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - 2s \left[ \frac{a(r - M)}{\Delta} + \frac{i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \\ & - 2s \left[ \frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia \cos \theta \right] \frac{\partial \psi}{\partial t} + (s^2 \cot^2 \theta - s) \psi = 4\pi \Sigma T, \end{aligned} \quad (2.146)$$

其中  $s$  为自旋权重,  $\psi$  代表波函数,  $T$  与物质有关。对于不同自旋的场, Teukolsky 方程的形式不变, 只是  $s, \psi, T$  发生了改变, 具体如表 2.1。

### 4.3 Teukolsky 方程的解法

Teukolsky 方程是一个典型的 Sturm-Liouville 方程, 运用数理方程的知识, 可以通过分离变量的方法先解齐次方程, 再将非齐次项按照齐次方程的本征函数展开, 得到最终的结果。

场	$\psi$	s	T
标量场	$\Phi$	0	$\square\Phi = 4\pi T$
Dirac 场	$\chi_0/\rho^{-1}\chi_1$	$\frac{1}{2}/-\frac{1}{2}$	0
电磁场	$\phi_0/\rho^{-2}\phi_2$	1/-1	$J_0/\rho^{-2}J_2$
引力场	$\Psi_0^B/\rho^{-4}\Psi_4^B$	2/-2	$2T_0/2\rho^{-4}T_4$

表 2.1 Teukolsky 方程中不同自旋的场和源的表达式。

首先解  $T = 0$  时的齐次方程，由于 Kerr 时空是轴对称的，因此可以做如下分离变量：

$$\psi = e^{-i\omega t} e^{im\varphi} S(\theta)R(r). \quad (2.147)$$

代入方程(2.146)化简得到  $S(\theta)$  满足的角向方程

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{dS}{d\theta} \right) + \left( a^2\omega^2 \cos^2\theta - \frac{(m + s \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} - 2a\omega s \cos\theta + s + A \right) S = 0, \quad (2.148)$$

和  $R(r)$  所满足的径向方程

$$\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left( \Delta^{s+1} \frac{dR}{dr} \right) + \left( \frac{K^2 - 2is(r-M)K}{\Delta} + 4is\omega r - \lambda \right) R = 0, \quad (2.149)$$

其中  $K \equiv (r^2 + a^2)\omega - am$ ， $\lambda \equiv A + a^2\omega^2 - 2am\omega$ ， $A$  为角向方程的本征值 (eigenvalue)。

### 4.3.1 角向方程 $S(\theta)$

方程(2.148)的解被称为带有自旋权重的椭球谐函数 (Spin-Weighted Spheroidal Harmonic Function, SWSH)，它可以自洽地将旋量理论引入广义相对论。SWSH 是由 Newman 和 Penrose 在 1966 年研究 Bondi-Metzner-Sachs (BMS) 群结构时所发展的 [113] 自旋权重球谐 (spherical harmonics) 函数，通过加入 Kerr 黑洞角动量参数  $a$  得到。如果用退化的逻辑来看，当  $a\omega = 0$  时，方程(2.148)退化为 spin-weighted 球谐方程

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{dY}{d\theta} \right) + \left( s - \frac{(m + s \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + A \right) Y = 0. \quad (2.150)$$

进一步令  $s = 0$ ，方程退化为球谐方程

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} Y_{lm} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] Y_{lm} = 0, \quad (2.151)$$

其解就是球谐函数  $Y_{lm}$ ，本征值为  $A = l(l+1)$ 。为了避免符号的混淆，我们之后统一用  $Y_{lm}$  来标记球谐函数，用  ${}_s Y_{lm}$  来标记 spin-weighted 球谐函数 (即  ${}_0 Y_{lm} = Y_{lm}$ )，用  ${}_s S_{lm}^{a\omega}$  来标记 SWSH (即  ${}_s S_{lm}^0 = {}_s Y_{lm}$ )。其中  $Y_{lm} \rightarrow {}_s Y_{lm}$  的变换可以通过定义升降算符  $\eth, \bar{\eth}$  的方式解析得到。下面我们来推导升降算符的表达式：

考虑一个量  $\eta$  的 Lorentz 变换

$$\eta \rightarrow e^{is\Lambda}\eta. \quad (2.152)$$

如果  $\eta$  为标量 (即  $s = 0$ )，则它在 Lorentz 变换下保持不变 (或称为一个 Lorentz 标量)。反之，Lorentz 变换将告诉我们这个量的自旋，如  $m^\mu \rightarrow e^{i\Lambda}m^\mu$ ， $\bar{m}^\mu \rightarrow e^{-i\Lambda}\bar{m}^\mu$ ，即  $m^\mu$  和  $\bar{m}^\mu$  为矢量。由于我们想研究角向方程的变换，所有的操作都是在  $(\theta, \varphi)$  平面中进行，与  $(t, r)$  无关。我们可以构造

$$\alpha = m^\mu \bar{m}^\nu \nabla_\nu \bar{m}_\mu. \quad (2.153)$$

则它的 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow (e^{i\Lambda}m^\mu) (e^{-i\Lambda}\bar{m}^\nu) \nabla_\nu (e^{-i\Lambda}\bar{m}_\mu) \\ &= e^{-i\Lambda}m^\mu (-i\bar{m}_\mu \bar{m}^\nu \nabla_\nu \Lambda + \bar{m}^\nu \nabla_\nu \bar{m}^\mu) \\ &= e^{-i\Lambda} (\alpha + i\bar{m}^\nu \nabla_\nu \Lambda), \end{aligned} \quad (2.154)$$

其中最后一个等号用到了  $m^\mu \bar{m}_\mu = -1$  的性质。从 Lorentz 变换的结果可以看出， $\alpha$  本身并不是一个张量，也无法定义它的自旋。但是，对于一个自旋为  $s$  的量  $\eta$ ，我们可以定义升降算符

$$\bar{\delta}\eta = m^\mu \nabla_\mu \eta + \bar{\alpha} s \eta, \quad (2.155a)$$

$$\bar{\delta}\eta = \bar{m}^\mu \nabla_\mu \eta - \alpha s \eta. \quad (2.155b)$$

通过 Lorentz 变换，我们可以验证  $\bar{\delta}\eta$  的自旋为  $s + 1$ ， $\delta\eta$  的自旋为  $s - 1$ 。这里给出前者的证明：

$$\begin{aligned} \bar{\delta}\eta &\rightarrow (e^{i\Lambda}m^\mu) \nabla_\mu (e^{is\Lambda}\eta) + e^{i\Lambda} (\bar{\alpha} - im^\mu \nabla_\mu \Lambda) s (e^{is\Lambda}\eta) \\ &= e^{i(s+1)\Lambda} [m^\mu \nabla_\mu \eta + \underline{ism^\mu (\nabla_\mu \Lambda) \eta} + s\bar{\alpha}\eta - \underline{ism^\mu (\nabla_\mu \Lambda) \eta}] \\ &= e^{i(s+1)\Lambda} \bar{\delta}\eta. \end{aligned} \quad (2.156)$$

为了简化计算，我们考虑  $(\theta, \varphi)$  平面中

$$m^\mu = \left(1, \frac{i}{\sin \theta}\right), \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad \mu, \nu = \theta, \varphi. \quad (2.157)$$

它表征了 Kinnersley 标架(2.130)在无穷远处的渐进行为 (即渐进平直的性质)，因而  $\nabla_\mu \rightarrow \partial_\mu$ 。计算得

$$\begin{aligned} \alpha &= m^\theta (\bar{m}^\theta \partial_\theta + \bar{m}^\varphi \partial_\varphi) \bar{m}_\theta + m^\varphi (\bar{m}^\theta \partial_\theta + \bar{m}^\varphi \partial_\varphi) \bar{m}_\varphi \\ &= m^\varphi \bar{m}^\theta \partial_\theta \bar{m}_\varphi = \frac{i}{\sin \theta} \partial_\theta (-i \sin \theta) = \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.158)$$

于是我们得到升降算符的最终表达式

$$\bar{\delta}\eta \equiv -\sin^s \theta \left( \partial_\theta + \frac{i}{\sin \theta} \partial_\varphi \right) (\sin^{-s} \eta) = - \left( \partial_\theta + \frac{i}{\sin \theta} \partial_\varphi - s \cot \theta \right) \eta, \quad (2.159a)$$

$$\bar{\delta}\eta \equiv -\sin^{-s} \theta \left( \partial_\theta - \frac{i}{\sin \theta} \partial_\varphi \right) (\sin^s \eta) = - \left( \partial_\theta - \frac{i}{\sin \theta} \partial_\varphi + s \cot \theta \right) \eta. \quad (2.159b)$$

还可以得到对易关系

$$[\bar{\delta}, \delta] \eta = \bar{\delta}\delta\eta - \delta\bar{\delta}\eta = 2s\eta. \quad (2.160)$$

需要注意的是，这里的推导采取的是一种最简便的形式，但从中并没有体现出 Newman 和 Penrose 研究这个问题的初衷，也没有解释为什么在(2.157)式要取无穷远处的渐进形式，因此强烈推荐对这些问题感兴趣的读者参考 Newman 和 Penrose 的原文章 [113]。

接下来，我们正式推导 spin-weighted 球谐函数所满足的方程。spin-weighted 球谐函数定义为

$${}_s Y_{lm}(\theta, \varphi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{(l-s)!}{(l+s)!}} \bar{\delta}^s Y_{lm}(\theta, \varphi), & 0 \leq s \leq l \\ \sqrt{\frac{(l+s)!}{(l-s)!}} (-)^s \bar{\delta}^s Y_{lm}(\theta, \varphi), & -l \leq s \leq 0 \\ 0, & |s| > l \end{cases} \quad (2.161)$$

利用定义可以导出如下性质

$${}_s \bar{Y}_{lm} = (-)^{m+s} {}_{-s} Y_{l,-m}, \quad (2.162a)$$

$$\bar{\delta}_s Y_{lm} = \sqrt{(l-s)(l+s+1)} {}_{s+1} Y_{lm}, \quad (2.162b)$$

$$\bar{\delta}_s Y_{lm} = -\sqrt{(l+s)(l-s+1)} {}_{s-1} Y_{lm}, \quad (2.162c)$$

$$\bar{\delta}\bar{\delta}_s Y_{lm} = -(l-s)(l+s+1) {}_s Y_{lm}. \quad (2.162d)$$

其实(2.162d)式就是  ${}_s Y_{lm}$  所满足的本征函数，带入  $\bar{\delta}$ ,  $\bar{\delta}$  的表达式化简得

$$\begin{aligned} \bar{\delta}\bar{\delta}_s Y_{lm}(\theta, \varphi) &= \bar{\delta} \left[ \left( -\partial_\theta - \frac{i}{\sin \theta} \partial_\varphi + s \cot \theta \right) {}_s Y_{lm}(\theta, \varphi) \right] \\ &= \bar{\delta} \left[ -\partial_{\theta s} Y_{lm}(\theta, \varphi) + \frac{m+s \cos \theta}{\sin \theta} {}_s Y_{lm}(\theta, \varphi) \right] \\ &= - \left[ \partial_\theta + \frac{m}{\sin \theta} + (s+1) \cot \theta \right] \left[ -\partial_{\theta s} Y_{lm}(\theta, \varphi) + \frac{m+s \cos \theta}{\sin \theta} {}_s Y_{lm}(\theta, \varphi) \right] \\ &= \partial_{\theta s}^2 Y_{lm} + \cot \theta \partial_{\theta s} Y_{lm} - \left( \frac{m+s \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 {}_s Y_{lm} + {}_s Y_{lm} \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial {}_s Y_{lm}}{\partial \theta} \right) + \left[ s - \frac{(m+s \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} \right] {}_s Y_{lm}. \end{aligned} \quad (2.163)$$

将(2.162d)式右侧带入得

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial {}_s Y_{lm}}{\partial \theta} \right) + \left[ l(l+1) - s^2 - \frac{(m + s \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} \right] {}_s Y_{lm} = 0. \quad (2.164)$$

将(2.150)式与(2.164)式对比得

$$s + A = l(l+1) - s^2. \quad (2.165)$$

因此我们将 spin-weighted 球谐函数的本征值, 即(2.150)式中的  $A$  记为  ${}_s A_l \equiv l(l+1) - s(s+1)$ . spin-weighted 球谐函数具有正交完备性

$$\int d\Omega {}_s \bar{Y}_{l'm'} {}_s Y_{lm} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (2.166a)$$

$$\sum_{lm} {}_s Y_{lm}(\theta', \varphi') {}_s Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta(\cos \theta' - \cos \theta) \delta(\varphi' - \varphi). \quad (2.166b)$$

方程(2.164)的解最终可以写成

$$\begin{aligned} {}_s Y_{lm}(\theta, \varphi) = & (-1)^m e^{im\varphi} \sqrt{\frac{(l+m)!(l-m)!(2l+1)}{4\pi(l+s)!(l-s)!}} \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} \left[ \binom{l-s}{k} \binom{l+s}{k+s-m} \right. \\ & \left. \times (-1)^{l-k-s} \cos^{2k+s-m} \left( \frac{\theta}{2} \right) \sin^{2l-2k-s+m} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.167)$$

其中  $k_{\min} = \max(0, m-s)$ ,  $k_{\max} = \min(l-s, l+m)$ 。

这样我们就处理完了自旋权重  $s$  的部分, 下面考虑 Kerr 黑洞自旋系数  $a$  的影响。从(2.148)可以看出, 实际上  $a\omega$  作为一个整体出现, 可以单独定义椭球率 (spheroidicity)  $\gamma \equiv a\omega$  为(2.148)中的一个参数。如果  $s=0$  但  $a\omega \neq 0$ , SWSH 退化为椭球函数 (SH)

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d {}_0 S_{lm}^{a\omega}}{d\theta} \right) + \left( a^2 \omega^2 \cos^2 \theta - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + A \right) {}_0 S_{lm}^{a\omega} = 0. \quad (2.168)$$

它也早已被人们在处理轴对称波动方程时进行过细致的研究 [114], 这里不再赘述。而对于(2.148), 通过令  $x \equiv \cos \theta$  以及  $\gamma = a\omega$ , 我们可以将方程改写为

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d} {dx} {}_s S_{lm}^\gamma(x) \right] + \left[ \gamma^2 x^2 - 2\gamma s x + s - \frac{(m+\gamma x)^2}{1-x^2} + {}_s A_{lm}(\gamma) \right] {}_s S_{lm}^\gamma(x) = 0, \quad (2.169)$$

其中  ${}_s A_{lm} = {}_s A_{lm}(\gamma)$  为本征值, 由前面的推导可知  ${}_s A_{lm}(0) = {}_s A_l = l(l+1) - s(s+1)$ 。历史上, 人们为了求解方程(2.169)发展出了很多方法, 其中最实用的当属 Leaver 的连分数递推关系法 [115–117], 和 Hughes 的球谐展开法 [109, 118, 119]。由于在之后介绍黑洞 QNM 的章节将专门介绍 Leaver 的连分数法, 这里我们采用球谐展开的方法, 也就是将本征值  ${}_s A_{lm}(\gamma)$  和本征函数  ${}_s S_{lm}^\gamma(\theta) \equiv {}_s S_{lm}(\theta; \gamma)$  都用  $\gamma$  展开的方法。从物理的角度来看, 对于一个固定的自旋

$s$ , 每一个  ${}_sS_{lm}(x; \gamma \neq 0)$  都相当于把时空沿着对称轴拉伸或者压缩, 从而可以在  ${}_sS_{lm}(x; 0)$  的基础上叠加其他  $\gamma = 0$  的模式展开, 也就是将“椭球谐函数”用“球谐”展开, 即

$${}_sS_{lm}(x; \gamma) = \sum_{l'=l_{\min}}^{\infty} {}_sC_{l'l m}(\gamma) {}_sS_{lm}(x; 0) = (\vec{C}_l)^T \vec{S}_l, \quad (2.170)$$

其中  $l_{\min} = \max(|m|, |s|)$ ,  ${}_sC_{l'l m}(\gamma)$  是第  $l$  阶 SW 椭球谐函数用第  $l'$  阶 SW 球谐函数展开的系数。前者的限制源于  $|m| \leq l$  和(2.161)定义的  $|s| \leq l$ , 后者之所以不用  $m$  展开是因为  $\gamma = 0$  时本征值  ${}_sA_l$  与  $m$  无关。由此定义的两个列向量  $\vec{C}_l$  和  $\vec{S}_l$  原则上都是无穷维的。但在实际的数值计算中, 我们设置一个截断  $l_{\max} \rightarrow \infty$ , 于是这两个向量为  $L = l_{\max} - l_{\min} + 1$  维。

将(2.170)式代入(2.169)式得

$$\mathbb{M} \vec{C}_l = {}_sA_{lm}(\gamma) \vec{C}_l, \quad (2.171)$$

其中  $\mathbb{M}$  是一个  $L \times L$  矩阵,  ${}_sA_{lm}(\gamma)$  是其本征值。其矩阵元  $\mathbb{M}_{l'l'}$  的表达式为

$$\mathbb{M}_{l'l'} = \begin{cases} -\gamma^2 \mathbb{A}_{l'm} & l' = l - 2, \\ -\gamma^2 \mathbb{D}_{l'm} + 2\gamma s \mathbb{F}_{l'm} & l' = l - 1, \\ {}_sA_l - \gamma^2 \mathbb{B}_{l'm} + 2\gamma s \mathbb{H}_{l'm} & l' = l, \\ -\gamma^2 \mathbb{E}_{l'm} + 2\gamma s \mathbb{G}_{l'm} & l' = l + 1, \\ -\gamma^2 \mathbb{C}_{l'm} & l' = l + 2, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2.172)$$

其中

$$\mathbb{A}_{lm} = \mathbb{F}_{lm} \mathbb{F}_{(l+1)m}, \quad (2.173a)$$

$$\mathbb{B}_{lm} = \mathbb{F}_{lm} \mathbb{G}_{(l+1)m} + \mathbb{G}_{lm} \mathbb{F}_{(l-1)m} + \mathbb{H}_{lm}^2, \quad (2.173b)$$

$$\mathbb{C}_{lm} = \mathbb{G}_{lm} \mathbb{G}_{(l-1)m}, \quad (2.173c)$$

$$\mathbb{D}_{lm} = \mathbb{F}_{lm} \mathbb{H}_{(l+1)m} + \mathbb{F}_{lm} \mathbb{H}_{lm}, \quad (2.173d)$$

$$\mathbb{E}_{lm} = \mathbb{G}_{lm} \mathbb{H}_{(l-1)m} + \mathbb{G}_{lm} \mathbb{H}_{lm}, \quad (2.173e)$$

$$\mathbb{F}_{lm} = \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{(2l+3)(2l+1)} \frac{(l+1)^2 - s^2}{(l+1)^2}}, \quad (2.173f)$$

$$\mathbb{G}_{lm} = \begin{cases} \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1} \frac{l^2 - s^2}{l^2}} & l \neq 0 \\ 0 & l = 0 \end{cases}, \quad (2.173g)$$

$$\mathbb{H}_{lm} = \begin{cases} -\frac{ms}{l(l+1)} & l \neq 0 \text{ and } s \neq 0 \\ 0 & l = 0 \text{ or } s = 0 \end{cases}. \quad (2.173h)$$

通过数值计算这个三对角矩阵  $\mathbb{M}$  的本征值  ${}_s A_{lm}(\gamma)$  和本征向量  $\vec{C}_l$ ，然后将其带入(2.170)并结合前面已经给出的 spin-weighted 球谐函数表达式(2.167)，我们就得到了 SWSH 的完整结果  ${}_s S_{lm}^{aw}(\theta) \equiv {}_s S_{lm}(\theta; \gamma)$ 。通过调节  $|\vec{C}_l|$  的大小，使得 SWSH 满足归一化条件

$$\int_0^\pi |{}_s S_{lm}^{aw}(\theta)|^2 \sin \theta d\theta = \frac{1}{2\pi}, \quad (2.174)$$

从而

$$\int {}_s \bar{S}_{l'm'}^{aw}(\theta, \varphi) {}_s S_{lm}^{aw}(\theta, \varphi) d\Omega = \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\varphi} d\varphi \int_0^\pi {}_s \bar{S}_{l'm'}^{aw}(\theta) {}_s S_{lm}^{aw}(\theta) \sin \theta d\theta = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (2.175)$$

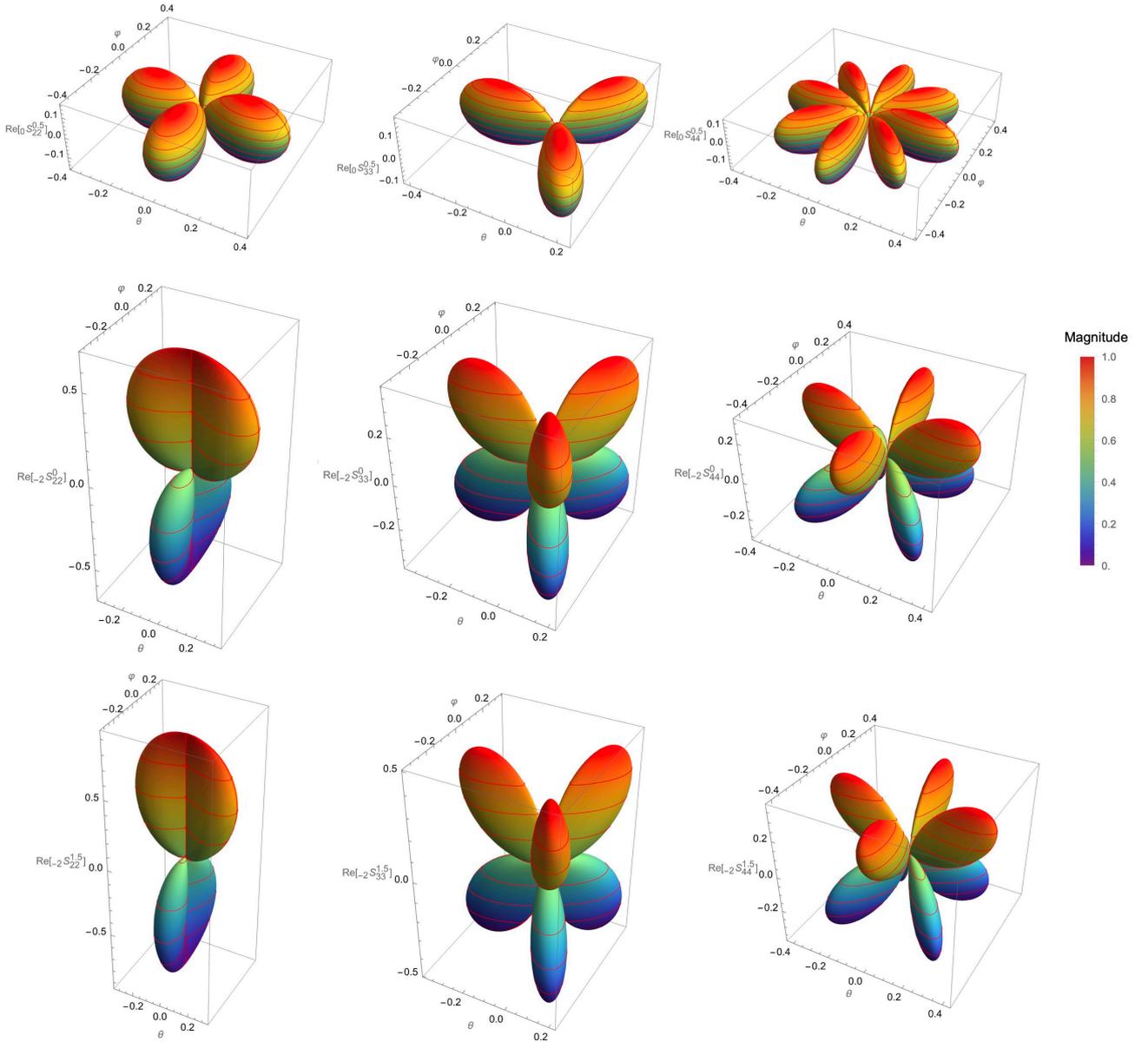


图 2.7 SWSH 示意图。左中右三列分别是  $l = m = 2$  模式， $l = m = 3$  模式， $l = m = 4$  模式下的  $\text{Re}[{}_s S_{lm}^{aw}(\theta, \varphi)]$ 。第一行设置  $s = 0$ ,  $aw = 0.5$ ，第二行设置  $s = -2$ ,  $aw = 0$ ，第三行设置  $s = -2$ ,  $aw = 1.5$ 。

图 2.7 展示了归一化后的 SWSH 示意图，可以看出自旋权重  $s$  改变图像的分支形态，椭圆率  $\gamma = a\omega$  将图像沿对称轴方向 ( $\theta = 0, \pi$ ) 拉长。图像使用 Black Hole Perturbation Toolkit 中的 Mathematica 代码 SpinWeightedSpheroidalHarmonics.m 绘制 [120]。

### 4.3.2 径向方程 $R(r)$

通过上一节中对 SWSH 的讨论，我们得知(2.148)的本征值  ${}_sA_{lm}(\gamma)$  与  $s, l, m, a\omega$  均有关，因而径向方程(2.149)中的分离变量参数  $\lambda \equiv {}_s\lambda_{lm}^{a\omega} = {}_sA_{lm}(a\omega) + a^2\omega^2 - 2ma\omega$  也与这些量有关。所以我们通常将方程(2.149)的解记为  $R(r) \equiv {}_sR_{lm\omega}(r)$ 。

同样地，为了描述微扰方程在视界处的行为，我们类比(2.13)式定义 Kerr 时空中的乌龟坐标

$$\frac{dr_*}{dr} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta}, \quad (2.176)$$

其积分形式为

$$r_* = r + \frac{2Mr_+}{r_+ - r_-} \ln \frac{r - r_+}{2M} - \frac{2Mr_-}{r_+ - r_-} \ln \frac{r - r_-}{2M}, \quad (2.177)$$

其中  $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$  为  $\Delta = 0$  的两个根，分别代表 Kerr 黑洞的外视界（事件视界）和内视界（Cauchy 视界）。定义函数

$$Y(r) \equiv \Delta^{s/2}(r^2 + a^2)^{1/2}R. \quad (2.178)$$

于是

$$\frac{dY}{dr_*} = \frac{dr}{dr_*} \frac{dY}{dr} = \frac{\Delta}{r^2 + a^2} \frac{dY}{dr}, \quad (2.179a)$$

$$\frac{d^2Y}{dr_*^2} = \frac{d}{dr_*} \frac{dY}{dr_*} = \frac{d}{dr_*} \left( \frac{\Delta}{r^2 + a^2} \frac{dY}{dr} \right) = \frac{\Delta}{r^2 + a^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{\Delta}{r^2 + a^2} \frac{dY}{dr} \right). \quad (2.179b)$$

因此方程(2.149)化为

$$\frac{d^2Y}{dr_*^2} + \left[ \frac{K^2 - 2is(r - M)K + \Delta(4i\omega sr - \lambda)}{(r^2 + a^2)^2} - G^2 - \frac{dG}{dr_*} \right] Y = 0, \quad (2.180)$$

其中

$$G = \frac{s(r - M)}{r^2 + a^2} + \frac{\Delta r}{(r^2 + a^2)^2}. \quad (2.181)$$

虽然在(2.178)式的变换下方程(2.180)中不再含有一阶导数项，它仍然十分复杂，无法被解析求解。但这不妨碍我们研究这个它在无穷远处 ( $r \rightarrow \infty$  或  $r_* \rightarrow \infty$ ) 和视界处 ( $r \rightarrow r_+$  或  $r_* \rightarrow -\infty$ ) 的渐进行为。

首先来看无穷远处的渐进行为, 将方程(2.180)在  $r \rightarrow \infty$  处展开保留到  $r^{-1}$  可得

$$Y_{,r_*r_*} + \left( \omega^2 + \frac{2i\omega s}{r} \right) Y = 0. \quad (2.182)$$

这方程可以用常数变易法求解, 忽略  $r^{-1}$  项得

$$Y_{,r_*r_*} + \omega^2 Y = 0. \quad (2.183)$$

解得

$$Y \sim e^{\pm i\omega r_*}, \quad (2.184)$$

这里  $\sim$  表示正比于, 因为在前面乘任意因子  $Y(r)$  还是原方程的解。在其基础上设方程(2.182)的解为

$$Y = u_{\pm}(r) e^{\pm i\omega r_*} \quad (2.185)$$

求导并取  $r \rightarrow \infty$  得

$$Y_{,r_*} = \left( \frac{\Delta}{r^2 + a^2} u_{\pm,r} \pm i\omega u_{\pm} \right) e^{\pm i\omega r_*} \simeq (u_{\pm,r} \pm i\omega u_{\pm}) e^{\pm i\omega r_*}. \quad (2.186)$$

求二阶导得

$$Y_{,r_*r_*} = (\cancel{u_{\pm,rr}} \pm i\omega u_{\pm,r} \pm i\omega u_{\pm,r} - \omega^2 u_{\pm}) e^{\pm i\omega r_*} \simeq (\pm 2i\omega u_{\pm,r} - \omega^2 u_{\pm}) e^{\pm i\omega r_*}, \quad (2.187)$$

其中  $u_{\pm,rr}$  在无穷远处相比于  $u_{\pm,r}$  是高阶小量, 故忽略。将二阶导的表达式代入(2.182)得

$$Y_{,r_*r_*} + \left( \omega^2 + \frac{2i\omega s}{r} \right) Y = \left( \pm 2i\omega u_{\pm,r} + \frac{2i\omega s u_{\pm}}{r} \right) e^{\pm i\omega r_*} = 0, \quad (2.188)$$

即

$$\pm u_{\pm,r} + \frac{s u_{\pm}}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{\pm}(r) \sim r^{\mp s}. \quad (2.189)$$

因此方程(2.182)的解为

$$Y(r \rightarrow \infty) \sim r^{\mp s} e^{\pm i\omega r_*}. \quad (2.190)$$

由此得到 Teukolsky 函数在无穷远处的渐进行为

$$R(r \rightarrow \infty) \sim \frac{1}{r^{s \pm s + 1}} e^{\pm i\omega r_*}. \quad (2.191)$$

在  $r \rightarrow r_+$  处, 方程(2.180)化为

$$\frac{d^2 Y}{dr_*^2} + \left[ p - \frac{is(r_+ - M)}{2Mr_+} \right]^2 Y = 0 \quad (2.192)$$

其中  $p \equiv \omega - am/2Mr_+$ , 解得

$$Y(r \rightarrow r_+) \sim e^{\pm i[p - is(r_+ - M)/(2Mr_+)]r_*} = e^{\pm ip} e^{s(r_+ - M)r_*/(2Mr_+)} \sim \Delta^{\pm s/2} e^{\pm ip}. \quad (2.193)$$

上式最后一步源于(2.177)中  $r_*(r \rightarrow r_+) \sim \ln \Delta + \text{const}$ 。于是得到外视界处 Teukolsky 函数的渐进行为

$$R(r \rightarrow r_+) \sim \Delta^{(-1 \pm 1)s/2} e^{\pm ipr_*}. \quad (2.194)$$

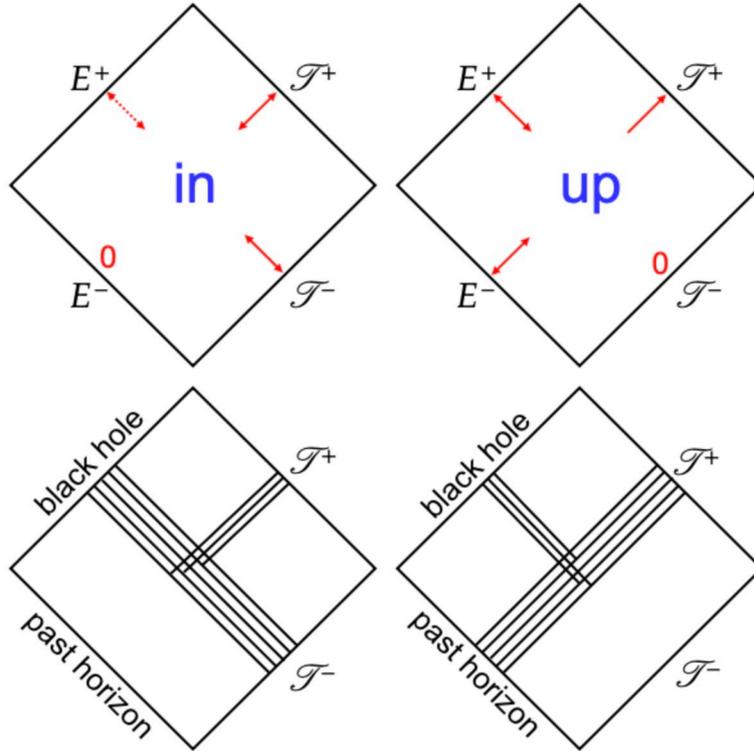


图 2.8 径向 Teukolsky 函数的共形图 (Penrose 图)。下方两幅图出现于 Chrzanowski 和 Misner 在 1974 年发表的文章 [121], 是上方两幅图的原始形式。“in” 这个组基物理上表示从无穷远处入射的引力波被 Kerr 势垒散射后, 一部分越过势垒被吸收进入黑洞, 另一部分被反射回无穷远处; “up” 这组基物理上表示在视界附近出射的引力波被 Kerr 势垒散射后, 一部分越过势垒传播到无穷远处, 另一部分被反射进入黑洞。

数学上, 我们可以用(2.191)和(2.194)的渐进行为通过施加不同的边界条件构造四组基函数, 也就是所谓的 “in/out/down” 基, 它们可以写为

$${}_s R_{lm\omega}^{\text{in}}(r) = \begin{cases} 0 & + {}_s R_{lm\omega}^{\text{in,trans}} \Delta^{-s} e^{-ipr_*} & r \rightarrow r_+ \\ {}_s R_{lm\omega}^{\text{in,ref}} r^{-1-2s} e^{+i\omega r_*} + {}_s R_{lm\omega}^{\text{in,inc}} r^{-1} e^{-i\omega r_*} & r \rightarrow \infty \end{cases}, \quad (2.195a)$$

$${}_s R_{lm\omega}^{\text{up}}(r) = \begin{cases} {}_s R_{lm\omega}^{\text{up,inc}} e^{+ipr_*} + {}_s R_{lm\omega}^{\text{up,ref}} \Delta^{-s} e^{-ipr_*} & r \rightarrow r_+ \\ {}_s R_{lm\omega}^{\text{up,trans}} r^{-1-2s} e^{+i\omega r_*} + 0 & r \rightarrow \infty \end{cases}, \quad (2.195b)$$

$${}_s R_{lm\omega}^{\text{out}}(r) = \begin{cases} {}_s R_{lm\omega}^{\text{out,trans}} e^{+ipr_*} + 0 & r \rightarrow r_+ \\ {}_s R_{lm\omega}^{\text{out,inc}} r^{-1-2s} e^{+i\omega r_*} + {}_s R_{lm\omega}^{\text{out,ref}} r^{-1} e^{-i\omega r_*} & r \rightarrow \infty \end{cases}, \quad (2.195c)$$

$${}_s R_{lm\omega}^{\text{down}}(r) = \begin{cases} {}_s R_{lm\omega}^{\text{down,ref}} e^{+ipr_*} + {}_s R_{lm\omega}^{\text{down,inc}} \Delta^{-s} e^{-ipr_*} & r \rightarrow r_+ \\ 0 + {}_s R_{lm\omega}^{\text{down,trans}} r^{-1} e^{-i\omega r_*} & r \rightarrow \infty \end{cases}. \quad (2.195d)$$

这四组基的渐进振幅上标中的“inc=incident”，“ref=reflection”，“trans=transmission”，它们的物理含义已经在(2.16)式以及图 2.3中做了十分详细的说明。一般来说，上述 4 组基函数中任意两个就可以构成完备基（囊括了四种边界条件），可以用来构造任意齐次解。一般用“in-up”这组基，因为它们满足在视界处纯入射和无穷远处纯出射的边界条件，是经典引力理论下“物理的”边界条件，如图2.8。为了第三章第2节计算 EMRI 波形的需要，我们进一步对渐近解(2.195)对“in-up”基在引力场  $s = \pm 2$  情形下的渐进行为进行理解：当  $s = 2$  时，在  $r \rightarrow \infty$  处内行波  $e^{-i\omega r_*}$  以  $1/r$  的速度衰减，而外行波  $e^{i\omega r_*}$  以  $1/r^5$  的速度衰减，因此  $s = 2$  对应的  $\psi = \Psi_0^B$  能够描述无穷远处内行波的行为；当  $s = -2$  时，在  $r \rightarrow \infty$  处内行波  $e^{-i\omega r_*}$  以  $1/r$  的速度衰减，而外行波  $e^{i\omega r_*}$  以  $r^3$  的速度发散，但  $s = -2$  对应  $\psi = \rho^{-4} \Psi_4^B = r^4 \Psi_4^B$ ，除去  $r^4$  的因子后发现  $\Psi_4$  的内行波以  $1/r^5$  衰减，外行波以  $1/r$  衰减，即  $s = -2$  能够描述无穷远处外行波的行为。根据 Weyl 标量的定义(2.91)，我们可以得到

$$\Psi_4^B(r \rightarrow \infty) = -\left(R_{t\theta t\theta}^B - R_{t\theta t\varphi}^B\right) = -\frac{\omega^2}{2} (h_{\theta\theta} - ih_{\theta\varphi}) = -\frac{\omega^2}{2} (h_+ - ih_\times). \quad (2.196)$$

因此 EMRI 波形的求解主要关注  $s = -2$  的微扰方程。

(2.195)式中展示的只是方程(2.149)的渐进解。如果我们想得到每个基函数的完整解，即在任意  $r_+ < r < \infty$  ( $-\infty < r_* < \infty$ ) 处  $R(r)$  的值，则需要数值积分或者将其用特殊函数展开。在不同的方法中，最常用的有 Misao Sasaki 和 Takashi Nakamura 于 1981 年发展的 Sasaki-Nakamura 方法 [122]；Shuheii Mano, Hisao Suzuki 和 Eiichi Takasugi 于 1996 年发展的 MST 方法 [123]；Batic 和 Schmid 在 2007 年将 Teukolsky 方程转换为 Heun 方程的解法 [124]。这些方法各有优劣，其中 MST 方法的解析性最好，但它起初是基于低频展开  $\omega M \ll 1$ 。后来 Fujita 和 Tagoshi 通过定义“renormalized angular momentum” $\nu$  的方式将其拓展到高频，使得 MST 成为了一个通用的方法 [125, 126]。上述各种方法的具体细节和数值实现并非本文的重点，因此不做过多的介绍，感兴趣的读者可以自行阅读相应的参考文献。但仍要说明的一点是，很多方法的精髓实际上是相通的。如在前面的第2节中，我们详细介绍了 Schwarzschild 时空中 RW 方程的解法，它与 Kerr 时空中 Sasaki-Nakamura 方程的解法是相同的，只是增加了数值计算的复杂度。同样地，MST 方法与之后在第6节中将要介绍的连分数法计算黑洞 QNM 本质上是相同。

## 5. Chandrasekhar 变换与 Sasaki-Nakamura 变换

### 5.1 RWZ 方程的 Chandrasekhar 变换

在本章第2节中我们介绍了 Schwarzschild 时空中奇宇称微扰的 Regge-Wheeler 方程和偶宇称微扰的 Zerilli 方程。在第4节中我们推导了 Kerr 时空微扰的 Teukolsky 方程。事实上，我们可以发现，如果将 Teukolsky 方程(2.146)中的所有背景时空角动量参数  $a$  取为 0 就可以得到一个 Schwarzschild 版本的微扰方程。这个方程也在 1972 年被 Bardeen 和 Press 独立于 Teukolsky 得到 [127]，被称为 Bardeen-Press-Teukolsky (BPT) 方程：

$$\begin{aligned} & \frac{r^4}{\Delta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Delta^{s+1} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \\ & - 2si \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - 2s \left( \frac{Mr^2}{\Delta} - r \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} + (s^2 \cot^2 \theta - s) \psi = 4\pi \Sigma T, \end{aligned} \quad (2.197)$$

其中  $\Delta = r^2 - 2Mr$ 。同样地，通过分离变量(2.147)，我们可以得到角向方程和径向方程。前面已经详细地讨论了角向解，也就是 spin-weighted 球谐函数  ${}_s Y_{lm}(\theta, \varphi)$ ，它的解析表达式为(2.167)式。径向方程如果用乌龟坐标  $r_*$  表示，则为(2.180)式的简化版本

$$\frac{d^2 Y}{dr_*^2} + (\omega^2 - V_Y) Y = 0, \quad (2.198)$$

其中

$$\begin{aligned} V_Y(r) &= -\frac{2is\omega}{r} + \frac{6isM\omega + s(s+1) + \lambda}{r^2} - \frac{2M(s^2 + s + \lambda - 1)}{r^3} + \frac{M^2(s^2 - 4)}{r^4} \\ &= -\frac{2is\omega}{r} + \frac{6isM\omega + l(l+1)}{r^2} - \frac{2M(l^2 + l - 1)}{r^3} + \frac{M^2(s^2 - 4)}{r^4}. \end{aligned} \quad (2.199)$$

这里第二个等号是因为分离变量常数退化为球对称时空下的  $\lambda = {}_s A_l = l(l+1) - s(s+1)$ 。将其与(2.14)中 Regge-Wheeler 和 Zerilli 方程的势能相比较可知， $V_{RW}$  和  $V_Z$  是短程势，而  $V_Y$  为长程势。这使得 RWZ 方程的解在无穷远处和视界处的渐进行为只有相位的依赖，如(2.16)式，而 BPT 方程不同边界条件的渐进行为还对  $r$  或  $\Delta$  有着不同的尺度依赖，如(2.195)式。因此我们很难对(2.198)用直接数值积分的方法匹配渐进振幅，因为 inc 波与 ref 波之间相差了很大的尺度，无法准确地提取它们前面的系数。

Chandrasekhar 和 Detweiler 在 1975-1978 年间发展了一系列方法对 BPT 函数做变换，变换后的方程应当有短程的有效势，并且应当与 RWZ 方程联系起来 [128-130]。实际上，BPT 方程本来没有奇宇称和偶宇称的区分，我们可以人为的将它们分离出来，详见 Chandrasekhar 1975 [128]。为了简化讨论，我们只推导奇宇称的 RW 方程与 BPT 方程之间的相互转换。

定义微分算符

$$\Lambda_{\pm} = \frac{d}{dr_*} \pm i\omega, \quad \Lambda^2 = \Lambda_+ \Lambda_- = \Lambda_- \Lambda_+ = \frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2. \quad (2.200)$$

于是 RW 方程(2.12)可以写为

$$\Lambda^2 \Psi_{\text{RW}} = V_{\text{RW}} \Psi_{\text{RW}}. \quad (2.201)$$

为方便起见, 我们再次给出 RW 势的具体形式

$$V_{\text{RW}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right] = 2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{(\beta_l + 1)r - 3M}{r^3}, \quad (2.202)$$

其中  $\beta_l = (l-1)(l+2)/2$ 。我们定义

$$W_{\text{RW}} = 2 \frac{r - 3M}{r^2}. \quad (2.203)$$

于是  $V_{\text{RW}}$  和  $W_{\text{RW}}$  满足三个恒等式

$$\frac{dV_{\text{RW}}}{dr_*} + W_{\text{RW}} V_{\text{RW}} = 6M \frac{(r - 2M)^2}{r^6}, \quad (2.204a)$$

$$\frac{dW_{\text{RW}}}{dr_*} + V_{\text{RW}} = 2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\beta_l r + 3M}{r^3}, \quad (2.204b)$$

$$\frac{r^2}{r - 2M} (\beta_l r + 3M) V_{\text{RW}} - 3M W_{\text{RW}} = 2\beta_l (\beta_l + 1). \quad (2.204c)$$

如果我们令

$$X(r) = \Lambda_- \Lambda_- \Psi_{\text{RW}} + W_{\text{RW}} \Lambda_- \Psi_{\text{RW}}, \quad (2.205)$$

或等价的

$$X(r) = V_{\text{RW}} \Psi_{\text{RW}} + (W_{\text{RW}} - 2i\omega) \Lambda_- \Psi_{\text{RW}}. \quad (2.206)$$

结合恒等式(2.204), 我们可以得到

$$\Lambda_+ X(r) = 6M \frac{(r - 2M)^2}{r^6} \Psi_{\text{RW}} + 2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\beta_l r + 3M}{r^3} \Lambda_- \Psi_{\text{RW}}. \quad (2.207)$$

通过(2.206)和(2.207)式, 我们可以得到逆变换

$$\left[ \frac{2}{3} \beta_l (\beta_l + 1) + 2Mi\omega \right] \Psi_{\text{RW}} = \frac{r^2 (\beta_l r + 3M)}{3(r - 2M)} X - \frac{r^6}{6(r - 2M)^2} (W_{\text{RW}} - 2i\omega) \Lambda_+ X, \quad (2.208a)$$

$$\left[ \frac{2}{3} \beta_l (\beta_l + 1) + 2Mi\omega \right] \Lambda_- \Psi_{\text{RW}} = -MX + \frac{r^6}{6(r - 2M)^2} V_{\text{RW}} \Lambda_+ X. \quad (2.208b)$$

由(2.208b)式得

$$\begin{aligned}\Lambda_+ \left[ \frac{r^6}{6(r-2M)^2} V_{\text{RW}} \Lambda_+ X - MX \right] &= \left[ \frac{2}{3} \beta_l (\beta_l + 1) + 2Mi\omega \right] \Lambda^2 \Psi_{\text{RW}} \\ &= \left[ \frac{2}{3} \beta_l (\beta_l + 1) + 2Mi\omega \right] V_{\text{RW}} \Psi_{\text{RW}}.\end{aligned}\quad (2.209)$$

再由(2.208a)得

$$\Lambda_+ \left[ \frac{r^6}{6(r-2M)^2} V_{\text{RW}} \Lambda_+ X - MX \right] = V_{\text{RW}} \left[ \frac{r^2(\beta_l r + 3M)}{3(r-2M)} X - \frac{r^6}{6(r-2M)^2} (W_{\text{RW}} - 2i\omega) \Lambda_+ X \right]. \quad (2.210)$$

化简得

$$\Lambda^2 X + \frac{4(r-3M)}{r^2} \Lambda_+ X - 2 \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{(\beta_l r + 3M)}{r^3} X = 0. \quad (2.211)$$

令  $X(r) = u(r)Y(r)$  带入(2.211)式并与(2.198)和(2.199)式 (取  $s = 2$ ) 比较可得

$$4 \frac{(r-3M)}{r^2} u(r) + 2 \frac{du}{dr_*} = 0. \quad (2.212)$$

解得

$$u(r) = \frac{r-2M}{r^3}. \quad (2.213)$$

这样我们就得到了从 Regge-Wheeler-Zerilli 函数到 Bardeen-Press-Teukolsky 函数的变换:

$$Y(r) = \frac{r^3}{r-2M} \Lambda_- [W_\bullet \Psi_\bullet + \Lambda_- \Psi_\bullet] = \frac{r^3}{r-2M} [V_\bullet \Psi_\bullet + (W_\bullet - 2i\omega) \Lambda_- \Psi_\bullet], \quad (2.214)$$

其中  $V_\bullet$  的表达式已经在(2.14)式给出, 而

$$W_{\text{RW}} = 2 \frac{r-3M}{r^2}, \quad W_Z = 2 \frac{\beta_l r^2 - 3\beta_l M r - 3M^2}{r^2(\beta_l r + 3M)}. \quad (2.215)$$

## 5.2 Teukolsky 方程的 Sasaki-Nakamura 变换

在上一小节中, 我们推导了 Schwarzschild 时空中 BPT 方程的 Chandrasekhar 变换。但是由于 RWZ 方程本身是齐次方程, 即(2.197)中  $T = 0$ , 因此它只能用于计算不同的场在 Schwarzschild 时空中的传播, 而不能计算物质激发的时空扰动 (Wheeler: 物质告诉时空如何弯曲)。为了得到非齐次方程的解, 我们则需要将代表源的项一同进行变换。事实上, 在得到(2.214)式的变换后, Chandrasekhar 和 Detweiler 尝试将其推广到 Kerr 时空 [131, 132], 通过对非齐次的径向 Teukolsky 方程 ((2.149)为齐次方程)

$$\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left( \Delta^{s+1} \frac{d_s R_{lm\omega}}{dr} \right) - {}_s V_s R_{lm\omega} = -{}_s \mathcal{T}_{lm\omega}, \quad (2.216)$$

的变换

$$\chi_d = \alpha_d(r)R + \frac{\beta_d(r)}{\Delta} \frac{dR}{dr}, \quad (2.217)$$

使得新函数  $\chi_d(r)$  满足方程

$$\Delta^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{\Delta} \frac{d\chi_d}{dr} \right) - U_d(r)\chi_d = -\mathcal{T}_\chi, \quad (2.218)$$

这里已经取  $s = -2$ ，下标  $d$  表示这个变换出自 Detweiler 1977 [131]。这个方程中的有效势  $U_d(r)$  是短程的，在  $\mathcal{T}_\chi = 0$  时将有助于我们数值积分求解  $\chi_d(r)$ 。然而 Detweiler 得到的方程(2.218)中的源项  $\mathcal{T}_\chi$  在变换后发散得甚至比(2.216)中的  ${}_s\mathcal{T}_{lm\omega}$  更快。这意味着，如果我们用 Green 函数法构造非齐次方程的解时，将面临一个发散的积分（Green 函数将在下一章计算 EMRI 波形时推导，积分的发散性会在第六章第1节详细讨论）。

1982 年，为了计算一个有质量粒子落入 Kerr 黑洞激发的引力波，Sasaki 和 Nakamura 推导出了一个能够兼容非齐次 Teukolsky 方程源项变换的方程 [122]，这个方程被称为 Sasaki-Nakamura 方程，变换被称为 Sasaki-Nakamura 变换。它与 Chandrasekhar-Detweiler 变换遵循同样的思想，都是为了让径向微扰方程变为变为短程（short-range）方程，从而在两个边界处  $r_* \rightarrow \pm\infty$ ，方程完全由  $X_{,r_*r_*} + [k^2 + \mathcal{O}(r_*^{-2})]X = 0$  主导，从而便于数值求解以及解析地研究其性质。因此对推导感兴趣的读者可以通过上一节的内容进行理解或参考原文章 [122]，这里不对 Sasaki-Nakamura 方程做详细的推导，只展示其结果。对于  $s = -2$  的情形，我们有

$$\left[ \frac{d^2}{dr_*^2} - F_{lm}(r) \frac{d}{dr_*} - U_{lm}(r) \right] X_{lm\omega} = \mathcal{S}_{lm\omega}(r), \quad (2.219)$$

其中

$$F_{lm}(r) = \frac{\eta'}{\eta} \frac{\Delta}{r^2 + a^2}, \quad (2.220a)$$

$$U_{lm}(r) = \frac{\Delta U_1}{(r^2 + a^2)^2} + G^2 + \frac{\Delta G'}{r^2 + a^2} - FG, \quad (2.220b)$$

$$G = -\frac{2(r-M)}{r^2 + a^2} + \frac{r\Delta}{(r^2 + a^2)^2}, \quad (2.220c)$$

$$U_1 = V + \frac{\Delta^2}{\beta} \left[ \left( 2\alpha + \frac{\beta'}{\Delta} \right)' - \frac{\eta'}{\eta} \left( \alpha + \frac{\beta'}{\Delta} \right) \right]. \quad (2.220d)$$

这里的撇号表示对  $r$  求导。Sasaki-Namakura 变换表示为

$$R_{lm\omega} = \frac{1}{\eta} \left[ \frac{\alpha\Delta + \beta'}{\sqrt{r^2 + a^2}} X_{lm\omega} - \frac{\beta}{\Delta} \left( \frac{\Delta X_{lm\omega}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right)' \right], \quad (2.221)$$

其中

$$\alpha = 3iK' + \lambda + \frac{6\Delta}{r^2} - i\frac{K\beta}{\Delta^2}, \quad (2.222a)$$

$$\beta = \Delta \left( -2iK + \Delta' - \frac{4\Delta}{r} \right), \quad (2.222b)$$

$$\eta = c_0 + \frac{c_1}{r} + \frac{c_2}{r^2} + \frac{c_3}{r^3} + \frac{c_4}{r^4}, \quad (2.222c)$$

这里的系数

$$c_0 = -12i\omega M + \lambda(\lambda + 2) - 12a\omega(a\omega - m), \quad (2.223a)$$

$$c_1 = 8ia[3a\omega - \lambda(a\omega - m)], \quad (2.223b)$$

$$c_2 = -24iaM(a\omega - m) + 12a^2 [1 - 2(a\omega - m)^2], \quad (2.223c)$$

$$c_3 = 24ia^3(a\omega - m) - 24Ma^2, \quad (2.223d)$$

$$c_4 = 12a^4. \quad (2.223e)$$

方程(2.219)中的源项为

$$\mathcal{S}_{lm\omega} = \frac{\eta\Delta\mathcal{W}}{(r^2 + a^2)^{3/2}r^2} \exp \left[ -i \int^r \frac{K}{\Delta} d\tilde{r} \right], \quad (2.224)$$

其中的  $\mathcal{W}$  与 Teukolsky 方程(2.216)中的源  $\mathcal{T}_{lm\omega} \equiv -{}_2\mathcal{T}_{lm\omega}$  之间的联系为

$$\frac{d^2\mathcal{W}}{dr^2} = -\frac{r^2}{\Delta^2} \mathcal{T}_{lm\omega}(r) \exp \left[ i \int^r \frac{K}{\Delta} d\tilde{r} \right]. \quad (2.225)$$

由于(2.224)中  $\mathcal{S}$  在无穷远处的  $\mathcal{W}/r^3$  衰减和在视界处的指数衰减, Sasaki-Nakamura 方程的源函数同样也是短程的。对于齐次 Sasaki-Nakamura 方程, 我们也可以得到其渐进行为

$$X^{\text{in}}(r_*) = \begin{cases} B_{\text{SN}}^{\text{trans}} e^{-ipr_*} & r_* \rightarrow -\infty \\ B_{\text{SN}}^{\text{inc}} e^{-i\omega r_*} + B_{\text{SN}}^{\text{ref}} e^{i\omega r_*} & r_* \rightarrow \infty \end{cases}, \quad (2.226a)$$

$$X^{\text{up}}(r_*) = \begin{cases} C_{\text{SN}}^{\text{ref}} e^{-ipr_*} + C_{\text{SN}}^{\text{inc}} e^{ipr_*} & r_* \rightarrow -\infty \\ C_{\text{SN}}^{\text{trans}} e^{i\omega r_*} & r_* \rightarrow \infty \end{cases}. \quad (2.226b)$$

后来, Scott Hughes 将 Sasaki-Nakamura 变换扩展到任意自旋  $s$  的场, 称为 Generalized-Sasaki-Nakamura (GSN) 形式 [133], Rico K. L. Lo 将 GSN 的频率空间扩展到复数域, 使得 GSN 方法的应用范围变得更加广泛 [109] (强烈推荐对数值计算细节感兴趣的读者阅读 [109])。

本工作中求解齐次 Teukolsky 方程使用的方法也是先求解 Sasaki-Nakamura 方程, 再通过(2.221)变换得到 Teukolsky 函数。个人认为, 现在学界对于 Sasaki-Nakamura 方程的态度大多还是将其作为求解 Teukolsky 方程的中间媒介, 并没有深刻认识到这一方程本身短程性带来的便利。因此, 求解非齐次 Sasaki-Nakamura 方程的方法远没有求解非齐次 Teukolsky 方程成熟。这也是本人目前 (2025 年) 对这一领域持续探索的原因。本人当下正在进行的一些工作, 包括 Sasaki-Nakamura 方程的具体应用细节及其拓展, 尤其是方程(2.225)的解法, 将在第六章第1节详细介绍和推导。

## 6. 黑洞的 Quasi-Normal Mode

准正则模(QNM)理论是伴随于黑洞微扰论产生的。由于径向齐次 Teukolsky 方程(2.149)是波动方程,那么在限定了边界条件之后一定会表现为一系列本征模式的叠加。QNM 就是一阶黑洞微扰方程的本征模式。在前面几节中,我们讨论了黑洞微扰方程不同的形式,既可以写成具有长程势的 Bardeen-Press-Teukolsky 方程,又可以写成具有短程势的 Regge-Wheeler-Zerilli 方程和 Sasaki-Nakamura 方程。但只要它们描述的是同一种时空,那么在此基础得到的 QNM 也应当是相同的,因此从 QNM 中我们可以唯一地提取出背景时空的信息。在此强烈建议对 QNM 历史,理论以及应用感兴趣的读者参考 Berti 2009 的综述 [85]。在本节中,我们仅对 QNM 的背后的物理和数值计算的方法进行简要介绍。

### 6.1 QNM 的物理诠释

我们仍是从最简单的 Schwarzschild 时空出发来讨论 QNM。现在设想这样一种物理情形:在距离 Schwarzschild 黑洞视界有限远的  $r$  处在某一时刻产生了一个初始的扰动,那么这个扰动将遵循 RWZ 方程(2.12)传播到时空各处。在这种物理情形下,视界处  $r \rightarrow 2M$  应当只有入射波成分,无穷远处  $r \rightarrow \infty$  只有出射波成分。所以并不存在构造齐次基函数“in”时所设想的无穷远处入射波和“up”中的视界处出射波(如图2.3和图2.8),即 RW 方程的渐近解

$$\begin{aligned} \psi_{l\omega}^{\text{in}} &\rightarrow \begin{cases} A_{l\omega}^{\text{trans}} e^{-i\omega r_*} & r_* \rightarrow -\infty, \\ A_{l\omega}^{\text{inc}} e^{-i\omega r_*} + A_{l\omega}^{\text{ref}} e^{i\omega r_*} & r_* \rightarrow \infty, \end{cases} \\ \psi_{l\omega}^{\text{up}} &\rightarrow \begin{cases} B_{l\omega}^{\text{inc}} e^{i\omega r_*} + B_{l\omega}^{\text{ref}} e^{-i\omega r_*} & r_* \rightarrow -\infty, \\ B_{l\omega}^{\text{trans}} e^{i\omega r_*} & r_* \rightarrow \infty, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.227)$$

中应当有  $A_{l\omega}^{\text{inc}} = B_{l\omega}^{\text{inc}} = 0$ 。或者等价的,两组基的 Wronskian

$$W \equiv \frac{d\psi_{l\omega}^{\text{up}}}{dr_*} \psi_{l\omega}^{\text{in}} - \frac{d\psi_{l\omega}^{\text{in}}}{dr_*} \psi_{l\omega}^{\text{up}} = 2i\omega A_{l\omega}^{\text{inc}} = 2i\omega B_{l\omega}^{\text{inc}} = 0. \quad (2.228)$$

这样一组特殊的解就是所谓的准正则模式(QNM)。在由于此时  $W = 0$ ,因此 in-up 基是线性相关的。再结合(2.17)式的能量守恒,我们可以得到  $A_{l\omega}^{\text{ref}}/A_{l\omega}^{\text{trans}} = B_{l\omega}^{\text{trans}}/B_{l\omega}^{\text{ref}}$ 。通过(2.18)式的归一化约定  $A_{l\omega}^{\text{trans}} = B_{l\omega}^{\text{trans}} = 1$ ,我们可以直接得到  $A_{l\omega}^{\text{ref}} = B_{l\omega}^{\text{ref}}$ 。

从能量守恒的角度来看,QNM 解来自时空中的某些初始扰动,这些扰动中的能量在转播的过程中逐渐被黑洞吸收或传播到无穷远处从而被耗散。因此这些振动模式并不能长久存在,而是像阻尼谐振子那样随时间指数衰减,这就是称其为“准(quasi)”正则模式的原因。换句话说,QNM 的频率  $\omega$  并非实频率而是复频率,由于分离变量时约定的 Fourier 变换因子为

$e^{-i\omega t}$ , 所以  $\text{Im } \omega < 0$ , 从而振幅是随时间指数衰减的。此外, 根据耗散谐振子的理论, 对于 RWZ 方程的每一个  $l$  模式 (对 Teukolsky 方程或 Sasaki-Nakamura 方程则是  $lm$  模式), 都有无数个称作“泛音 (overtunes)”的衰减更快的模式与之对应。所有模式的 QNM 频率总体可以构成一个频谱, 对它们的研究称为“黑洞光谱学 (black hole spectroscopy)”。黑洞的“光谱”反映的是黑洞本身的性质, Schwarzschild 黑洞的“光谱”完全由其质量  $M$  决定, Kerr 黑洞的“光谱”完全由其质量  $M$  和角动量参数  $a$  决定。因此通过探测双黑洞并和引力波的“铃宕 (ringdown)”阶段并与 QNM 进行匹配, 我们可以非常精确地得到黑洞的质量和自旋。除此之外, 对于散射问题, 人们定义了“灰体系数 (greybody factor)”

$$\Gamma = \frac{1}{|A_{\text{in}}|}. \quad (2.229)$$

显然, 当入射波的频率越接近 QNM 频率时,  $|A_{\text{in}}|$  越小  $\Gamma$  越大, QNM 被激发地越剧烈。我们将看到, 除了双黑洞并和 (碰撞) 之外, b-EMRI 这样的三体系统也可以通过共振激发超大质量黑洞 QNM, 这些现象将在第五章第 1.1 节详细讨论。

## 6.2 Schwarzschild 黑洞 QNM 频率的计算

计算 QNM 频率的方法有多种, 其中最精确的是 Leaver 的连分数法 [117]。我们还是从 RW 方程出发介绍, 通过将  $dr_*$  转换回  $dr$ , 可以得到

$$r(r-2M)\frac{d^2\psi_l}{dr^2} + 2M\frac{d\psi_l}{dr} + \left[ \frac{\omega^2 r^3}{r-2M} - l(l+1) + \frac{6M}{r} \right] \psi_l = 0, \quad (2.230)$$

其中  $\psi_l = \Psi_{\text{RW}}$ 。需要指出,  $r = 2M$  是该方程的正则奇点, 其指标为  $\rho = \pm i\omega$ 。为满足视界处的入射波边界条件, 即  $e^{-i\omega r_*} \sim e^{-2iM\omega}(r-2M)^{-2iM\omega}$ , 我们选择  $\rho = -i\omega$ 。同时, 在无穷远处需满足纯出射波边界条件, 即  $e^{i\omega r_*} \sim e^{i\omega r} r^{2iM\omega}$ 。方程 (2.230) 的一个同时满足  $r \rightarrow 2M$  和  $r \rightarrow \infty$  处边界条件的解可表示为级数的形式:

$$\psi_l = (r-2M)^{-2iM\omega} r^{4iM\omega} e^{i\omega r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \frac{r-2M}{r} \right)^n. \quad (2.231)$$

求一阶导得

$$\frac{d\psi_l}{dr} = (r-2M)^{-2iM\omega} r^{4iM\omega} e^{i\omega r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\omega(r^2-8M^2) + 2Mn}{r(r-2M)} a_n \left( \frac{r-2M}{r} \right)^n, \quad (2.232)$$

二阶导得

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi_l}{dr^2} = & (r-2M)^{-2iM\omega} r^{4iM\omega} e^{i\omega r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \frac{r-2M}{r} \right)^n \left[ \frac{-16M^2\omega^2 - 8iMn\omega + n^2}{Mr} \right. \\ & + \frac{-16M^2\omega^2 - 8iMn\omega - 4iM\omega + n^2 + n}{r^2} + \frac{-4M^2\omega^2 - 4iMn\omega + 2iM\omega + n^2 - n}{(r-2M)^2} \\ & \left. + \frac{12M^2\omega^2 + 8iMn\omega - n^2}{M(r-2M)} - \omega^2 \right]. \end{aligned}$$

$$(2.233)$$

将(2.231), (2.232), (2.233)式带入(2.230)式得

$$B_0 a_0 + C_0 a_0 \frac{r-2M}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n a_n \left( \frac{r-2M}{r} \right)^{n-1} + B_n a_n \left( \frac{r-2M}{r} \right)^n + C_n a_n \left( \frac{r-2M}{r} \right)^{n+1} \right] = 0, \quad (2.234)$$

其中

$$\begin{aligned} A_n &= n(n - 4iM\omega), \\ B_n &= -2n^2 + 2n(8iM\omega - 1) + 32M^2\omega^2 + 8iM\omega - l(l+1) + 3, \\ C_n &= n^2 + n(2 - 8iM\omega) - 16M^2\omega^2 - 8iM\omega - 3. \end{aligned} \quad (2.235)$$

通过逐阶系数, 我们可以得到

$$A_{n+1} a_{n+1} + B_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} = 0, \quad (2.236)$$

它可以重新整理成

$$\alpha_0 a_1 + \beta_0 a_0 = 0, \quad (2.237a)$$

$$\alpha_n a_{n+1} + \beta_n a_n + \gamma_n a_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.237b)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_n &= n^2 + (2 - 4iM\omega)n - 4iM\omega + 1, \\ \beta_n &= -2n^2 + (16iM\omega - 2)n + 32M^2\omega^2 + 8iM\omega - l(l+1) + 3, \\ \gamma_n &= n^2 - 8iM\omega n - 16M^2\omega^2 - 4. \end{aligned} \quad (2.238)$$

这个三项递推关系通过设定  $a_0 = 1$  归一。由于序列

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \frac{r-2M}{r} \right)^n \quad (2.239)$$

必须是收敛的, (2.231)式才有意义。因此通过递推关系, 我们可以得到

$$\alpha_n \frac{a_{n+1}}{a_n} + \beta_n + \gamma_n \frac{a_{n-1}}{a_n} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\cong} \alpha_n \frac{a_{n+1}}{a_n} + \beta_n + \gamma_n \frac{a_n}{a_{n+1}} = 0. \quad (2.240)$$

解上面这个方程得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} \frac{-\beta_n \pm \sqrt{\beta_n^2 - 4\alpha_n \gamma_n}}{2\alpha_n} \Bigg|_{n \rightarrow \infty} = 1 \pm \frac{\sqrt{-4iM\omega}}{n^{1/2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.241)$$

只有取负号时，序列是一致收敛的，此时对应的频率  $\omega$  就是 QNM 的频率。运用

$$\alpha_{n+1} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} + \beta_{n+1} + \gamma_{n+1} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 0, \tag{2.242}$$

我们还可以得到

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} + \alpha_{n+1} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}} = \frac{-\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} - \frac{\alpha_{n+1} \gamma_{n+2}}{\beta_{n+2} - \frac{\alpha_{n+2} \gamma_{n+3}}{\beta_{n+3} - \dots}}}. \tag{2.243}$$

	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell \gg 1$
$n = 1$	$\pm 0.373\,672 + 0.088\,962i$	$\pm 0.599\,443 + 0.092\,703i$	
$n = 2$	$\pm 0.346\,711 + 0.273\,915i$	$\pm 0.582\,644 + 0.281\,298i$	$\pm \frac{\ell + \frac{1}{2}}{3\sqrt{3}} + \frac{n + \frac{1}{2}}{3\sqrt{3}}i$
$n = 3$	$\pm 0.301\,054 + 0.478\,272i$	$\pm 0.551\,685 + 0.479\,093i$	
$n \rightarrow \infty$	$\pm 0.08 + (\frac{1}{4}n - 0.1)i$	$\pm 0.08 + (\frac{1}{4}n - 0.32)i$	

表 2.2 最低的几个 QNM 频率  $GM\omega_{nl}/c^3$ ，其中  $M$  为 Schwarzschild 黑洞的质量

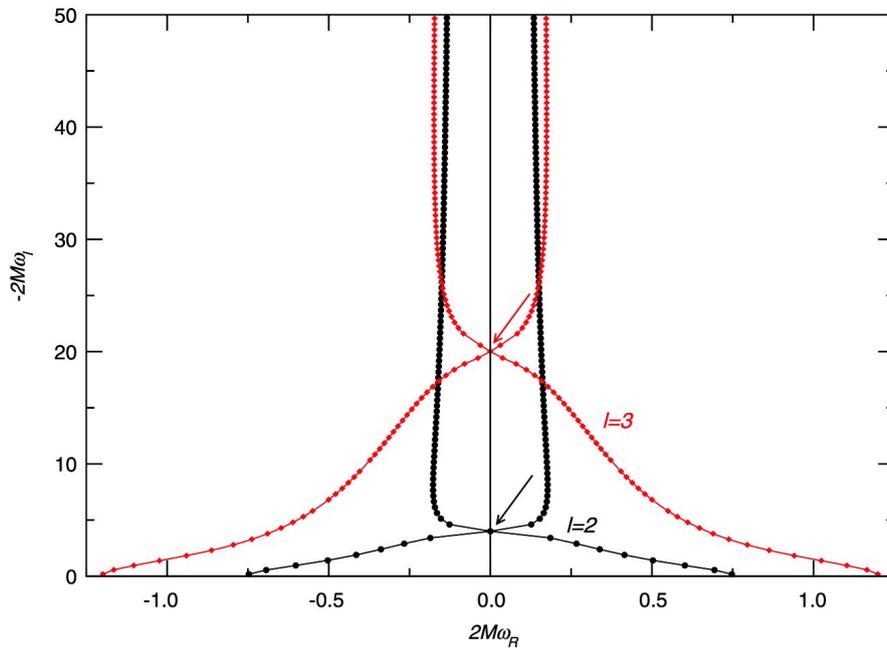


图 2.9 Schwarzschild 黑洞  $l = 2$  和  $l = 3$  的 QNM 频谱。图片出自 Berti et al., 2009 [85]。

这样的连分数一般记做

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} - \frac{\alpha_{n+1} \gamma_{n+2}}{\beta_{n+2} - \frac{\alpha_{n+2} \gamma_{n+3}}{\beta_{n+3} - \dots}}}. \tag{2.244}$$

因而从  $n = 0$  开始的连分数为

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{-\gamma_1}{\beta_1 -} \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\beta_2 -} \frac{\alpha_2 \gamma_3}{\beta_3 -} \cdots \quad (2.245)$$

由(2.237a)可知

$$\frac{a_1}{a_0} = -\frac{\beta_0}{\alpha_0}. \quad (2.246)$$

我们得到一个方程

$$0 = \beta_0 - \frac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_1 -} \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\beta_2 -} \frac{\alpha_2 \gamma_3}{\beta_3 -} \cdots \quad (2.247)$$

我们可以任意置换方程(2.247) $n$ 次, 得到另一个等价的连分数方程

$$\left[ \beta_n - \frac{\alpha_{n-1} \gamma_n}{\beta_{n-1} -} \frac{\alpha_{n-2} \gamma_{n-1}}{\beta_{n-2} -} \cdots \frac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_0} \right] = \left[ \frac{\alpha_n \gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} -} \frac{\alpha_{n+1} \gamma_{n+2}}{\beta_{n+2} -} \frac{\alpha_{n+2} \gamma_{n+3}}{\beta_{n+3} -} \cdots \right] \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.248)$$

对于任意  $n > 0$  的情况, 方程 (2.247)与方程 (2.248)完全等价。我们将它们视为关于  $\omega$  (以及  $l$ ) 的特征方程, QNM 频率  $\omega_{ln}$  即为这些方程的根。因而这个问题现已完全转化为求解特征方程根的数值计算问题。表2.2展示了部分计算结果。由于  $n$  可以取到无穷, 因此 QNM 频率构成一个复数空间中的频谱, 如图2.9所示。



## 第三章 EMRI 的波形计算

本章内容主要出自本人在 2023-2024 年间学习 EMRI 波形计算时的笔记与组会讲稿的整理。实际上,在计算 EMRI 波形的过程中,解析求解黑洞的轨迹与解 Teukolsky 方程得到波形是同等重要的,甚至可以说前者是后者的基础。因此本章中将按照求解逻辑的先后顺序介绍 EMRI 波形的计算方法。

### 1. Kerr 时空中有质量粒子的动力学

#### 1.1 守恒量与测地线方程

如果忽略微扰,将小黑洞看做超大质量 Kerr 黑洞时空中的一个测试粒子 (test particle),则小黑洞的轨迹应当遵循测地线 (geodesic) 方程

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad x^\mu = t, r, \theta, \varphi. \quad (3.1)$$

但实际上由于 Kerr 时空本身的对称性,我们可以得到一些守恒量 (constants of motion),来化简测地线方程。设粒子的 4-动量为  $p^\mu$ ,则我们可以立刻得到第一个守恒量  $p^\mu p_\mu = -\mu^2$  (或者  $u^\mu u_\mu = -1$ ),即约化质量  $\mu$  守恒。在 test particle 极限下, $\mu$  就是粒子的质量。

由于 Kerr 度规  $g_{\mu\nu}$  (见(2.115)) 中不显含  $t$  和  $\varphi$ ,因此 Kerr 时空中有两个 Killing 矢量  $\xi_{(t)}^\mu = \delta_{t\mu}$ ,  $\xi_{(\varphi)}^\mu = \delta_{\varphi\mu}$  满足 Killing 方程

$$\nabla_\nu \xi_{(t)\mu} + \nabla_\mu \xi_{(t)\nu} = 0, \quad \nabla_\nu \xi_{(\varphi)\mu} + \nabla_\mu \xi_{(\varphi)\nu} = 0. \quad (3.2)$$

于是我们可以得到另外两个守恒量

$$-E = p_\mu \xi_{(t)}^\mu = g_{\mu\nu} p^\mu \xi_{(t)}^\nu = g_{tt} p^t + g_{t\varphi} p^\varphi, \quad (3.3a)$$

$$L_z = p_\mu \xi_{(\varphi)}^\mu = g_{\mu\nu} p^\mu \xi_{(\varphi)}^\nu = g_{\varphi t} p^t + g_{\varphi\varphi} p^\varphi, \quad (3.3b)$$

其中  $E$  为粒子的能量, $L_z$  为轴向角动量。反解(3.3)可得

$$p^t = \frac{E}{\Sigma} \left[ \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] + \frac{aL_z}{\Sigma} \left( 1 - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \right), \quad (3.4a)$$

$$p^\varphi = \frac{aE}{\Sigma} \left( \frac{r^2 + a^2}{\Delta} - 1 \right) + \frac{L_z}{\Sigma} \left( \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{a^2}{\Delta} \right). \quad (3.4b)$$

除了  $\mu$ ,  $E$ ,  $L_z$  之外, Carter 于 1968 年发现 Kerr 时空还有一个隐藏的 Killing 张量 [134], 定义为

$$K_{\mu\nu} = \Sigma (l_\mu n_\nu + n_\mu l_\nu) + r^2 g_{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

满足

$$\nabla_{(\rho} K_{\mu\nu)} = 0. \quad (3.6)$$

这里的  $l_\mu$ ,  $n_\mu$  就是(2.130)式中定义的 Kinnersley 标架的协变形式。于是可以得到 Kerr 时空的中 test particle 的第四个守恒量 Carter 常数

$$K \equiv K_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = p_\theta^2 + \cos^2 \theta \left[ a (\mu^2 - E^2) + \left( \frac{L_z}{\sin \theta} \right)^2 \right], \quad (3.7)$$

有时也将 Carter 常数定义为

$$Q = K - (L_z - aE)^2. \quad (3.8)$$

其物理意义在于, 当我们取 Schwarzschild 极限  $a \rightarrow 0$  时,  $K = L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$  表示总角动量的平方, 而  $Q = L^2 - L_z^2 = L_x^2 + L_y^2$  表示非轴向角动量的平方。当  $a \neq 0$  时,  $Q$  可能小于零而  $K \geq 0$ 。为了书写的方便, 我们用  $\mu$  和  $M$  归一化另外三个守恒量, 定义 test particle 的能量密度, 角动量密度和 Carter 常数密度为

$$\mathcal{E} \equiv \frac{E}{\mu}, \quad \mathcal{L}_z \equiv \frac{L_z}{\mu M}, \quad \mathcal{Q} \equiv \frac{Q}{\mu^2 M^2}. \quad (3.9)$$

于是(3.4)式和(3.7)式中的  $p^{t,\theta,\varphi} \rightarrow u^{t,\theta,\varphi}$ ,  $E, L_z, Q \rightarrow \mathcal{E}, \mathcal{L}_z, \mathcal{Q}$ 。再结合  $u^\mu u_\mu = -1$ , 我们可以得到一个关于  $u^r$  的方程, 这就是完整的 Kerr 时空有质量粒子的测地线方程:

$$\Sigma \frac{dt}{d\tau} = -a (a\mathcal{E} \sin^2 \theta - \mathcal{L}_z) + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} P, \quad (3.10a)$$

$$\Sigma^2 \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 = R(r), \quad (3.10b)$$

$$\Sigma^2 \left( \frac{d \cos \theta}{d\tau} \right)^2 = \Theta(\cos \theta), \quad (3.10c)$$

$$\Sigma \frac{d\varphi}{d\tau} = - \left( a\mathcal{E} - \frac{\mathcal{L}_z}{\sin^2 \theta} \right) + \frac{a}{\Delta} P, \quad (3.10d)$$

这里  $\theta$  方向用  $\cos \theta$  表示, 是为了便于后续计算, 其中

$$P(r) = \mathcal{E} (r^2 + a^2) - a\mathcal{L}_z, \quad (3.11a)$$

$$R(r) = P^2 - \Delta [r^2 + (\mathcal{L}_z - a\mathcal{E})^2 + \mathcal{Q}], \quad (3.11b)$$

$$\Theta(\cos \theta) = \mathcal{Q} - [\mathcal{Q} + a^2 (1 - \mathcal{E}^2) + \mathcal{L}_z^2] \cos^2 \theta + a^2 (1 - \mathcal{E}^2) \cos^4 \theta. \quad (3.11c)$$

## 1.2 束缚态轨道的解析解

观察(3.11)式可以发现,  $R$  只是  $r$  的函数和  $\Theta$  只是  $\theta$  的函数。但是由于(3.10)左侧均有  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ , 所以  $r$  方向和  $\theta$  方向的测地线方程仍不能完全解耦。为了得到解耦的测地线方程, Mino 定义了一个新的仿射参数  $\lambda$  [135], 满足

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \Sigma, \quad (3.12)$$

于是

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = R(r), \quad \left(\frac{d\cos\theta}{d\lambda}\right)^2 = \Theta(\cos\theta). \quad (3.13)$$

我们将  $\lambda$  称为 Mino time。另外两个方程也可以表示为

$$\frac{dt}{d\lambda} = T_r(r) + T_\theta(\cos\theta) + a\mathcal{L}_z, \quad \frac{d\varphi}{d\lambda} = \Phi_r(r) + \Phi_\theta(\cos\theta) - a\mathcal{E}, \quad (3.14)$$

其中

$$\begin{aligned} T_r(r) &= \frac{r^2 + a^2}{\Delta} P(r), & T_\theta(\cos\theta) &= -a^2 \mathcal{E} (1 - \cos^2 \theta) \\ \Phi_r(r) &= \frac{a}{\Delta} P(r), & \Phi_\theta(\cos\theta) &= \frac{\mathcal{L}_z}{1 - \cos^2 \theta}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

对于 Newtonian 引力下的 Kepler 问题, 我们一般不用  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{L}_z$  等守恒量描述轨道的形态, 而使用轨道半通径 (semi-latus rectum)  $p$ , 偏心率 (eccentricity)  $e$  等有几何对应的量描述。在 Kerr 时空中, 我们还需要一个与 Carter 常数  $\mathcal{Q}$  对应的几何量——轨道倾角 (inclination)  $\iota$ 。因此, 我们想知道在  $(p, e, \iota)$  的情况下如何计算  $(\mathcal{E}, \mathcal{L}_z, \mathcal{Q})$ , 这将在下一小节详细介绍。

### 1.2.1 从轨道参数到守恒量 (本节的部分记号与 Ricci 旋转系数重复, 注意区分)

对于束缚态的轨道,  $r$  和  $\theta$  都在某个区间范围内做周期性运动。设  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ ,  $\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$ , 其中  $\theta_{\max} = \pi - \theta_{\min}$ , 这是因为  $\Theta(\cos\theta)$  在  $\theta \rightarrow \pi - \theta$  下保持不变。这些极值点被称为转折点 (turning points), 它们与轨道参数的关系为

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e}, \quad r_{\max} = \frac{p}{1-e}, \quad \theta_{\min} + (\text{sgn } \mathcal{L}_z) \iota = \frac{\pi}{2}. \quad (3.16)$$

物理上, 我们有

$$R(r_{\min}) = R(r_{\max}) = 0, \quad \Theta(\pm \cos\theta_{\min}) = 0. \quad (3.17)$$

借鉴 Schmidt 2002 中的记号 [136], 我们利用(3.17)式的性质可以得到

$$\mathcal{Q} = z_- \left( \beta + \frac{\mathcal{L}_z^2}{1 - z_-} \right), \quad (3.18)$$

其中

$$z_- = \cos^2 \theta_{\min}, \quad \beta = a^2 (1 - \mathcal{E}^2). \quad (3.19)$$

这样一来，我们就消除了倾角  $\iota$  的自由度，剩下的任务就是推导  $(p, e) \rightarrow (\mathcal{E}, \mathcal{L}_z)$  的映射。将(3.18)式带入(3.11b)式得

$$R(r) = f(r)\mathcal{E}^2 - 2g(r)\mathcal{E}\mathcal{L}_z - h(r)\mathcal{L}_z^2 - d(r), \quad (3.20)$$

其中

$$f(r) = r^4 + a^2 [r(r + 2M) + z_- \Delta], \quad (3.21a)$$

$$g(r) = 2Mar, \quad (3.21b)$$

$$h(r) = r(r - 2M) + \frac{z_-}{1 - z_-} \Delta, \quad (3.21c)$$

$$d(r) = (r^2 + a^2 z_-) \Delta. \quad (3.21d)$$

对于(3.20)式，我们有(3.17)式的两个边界条件。但若  $e = 0$ ，即轨道为球对称轨道（或圆轨道，如果  $\iota = 0$ ），两个边界条件合并为  $r_{\min} = r_{\max} = p = r_0$ 。但这时，我们可以列出另一个条件。假设圆轨道在最小稳定圆轨道（**Innermost Stable Circular Orbit, ISCO**）之外，则

$$R'(r = r_0) = \frac{dR}{dr} = \frac{d\lambda}{dr} \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = 2 \frac{d\lambda}{dr} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 2 \frac{d^2 r}{d\lambda^2} = 0. \quad (3.22)$$

两组条件可以合并写成

$$\begin{cases} f_1 \mathcal{E}^2 - 2g_1 \mathcal{E} \mathcal{L}_z - h_1 \mathcal{L}_z^2 - d_1 = 0, \\ f_2 \mathcal{E}^2 - 2g_2 \mathcal{E} \mathcal{L}_z - h_2 \mathcal{L}_z^2 - d_2 = 0, \end{cases} \quad (3.23)$$

其中

$$(f_1, g_1, h_1, d_1) = \begin{cases} (f(r_{\min}), g(r_{\min}), h(r_{\min}), d(r_{\min})) & e > 0, \\ (f(r_0), g(r_0), h(r_0), d(r_0)) & e = 0, \end{cases} \quad (3.24)$$

$$(f_2, g_2, h_2, d_2) = \begin{cases} (f(r_{\max}), g(r_{\max}), h(r_{\max}), d(r_{\max})) & e > 0, \\ (f'(r_0), g'(r_0), h'(r_0), d'(r_0)) & e = 0. \end{cases}$$

消去(3.23)式中的  $\mathcal{L}_z$  可得

$$(\rho^2 + 4\eta\sigma) \mathcal{E}^4 - 2(\kappa\rho + 2\epsilon\sigma) \mathcal{E}^2 + \kappa^2 = 0, \quad (3.25)$$

其中

$$\kappa = \begin{vmatrix} d_1 & h_1 \\ d_2 & h_2 \end{vmatrix}, \quad \epsilon = \begin{vmatrix} d_1 & g_1 \\ d_2 & g_2 \end{vmatrix}, \quad \rho = \begin{vmatrix} f_1 & h_1 \\ f_2 & h_2 \end{vmatrix}, \quad \eta = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{vmatrix}, \quad \sigma = \begin{vmatrix} g_1 & h_1 \\ g_2 & h_2 \end{vmatrix}. \quad (3.26)$$

解(3.25)得

$$\mathcal{E}^2 = \frac{\kappa\rho + 2\epsilon\sigma + 2(\text{sgn } \mathcal{L}_z)\sqrt{\sigma(\sigma\epsilon^2 + \rho\epsilon\kappa - \eta\kappa^2)}}{\rho^2 + 4\eta\sigma}. \quad (3.27)$$

将其直接带入(3.23)第一式得

$$\mathcal{L}_z = -\frac{g_1\mathcal{E}}{h_1} + (\text{sgn } \mathcal{L}_z)\sqrt{\frac{g_1^2\mathcal{E}^2}{h_1^2} + \frac{f_1\mathcal{E}^2 - d_1}{h_1}}, \quad (3.28)$$

这里的  $\text{sgn } \mathcal{L}_z$  表示的是粒子运动方向与 Kerr 黑洞旋转方向的关系,  $\text{sgn } \mathcal{L}_z = 1$  代表同向旋转,  $\text{sgn } \mathcal{L}_z = -1$  代表反向旋转。综上, 我们得到了  $(p, e, l) \rightarrow (\mathcal{E}, \mathcal{L}_z, Q)$  的映射。

### 1.2.2 轨道频率 (本节内容主要出自 Fujita & Hikida 2009 [137])

在这一小节中, 我们将  $t, r, \theta, \varphi$  四个时空方向的运动进一步解耦, 并提取出这些方向的基本频率。其中, 比较方便实现的是  $r$  方向和  $\theta$  方向。如  $r$  方向的一个周期可以表示为从近心点  $r_{\min}$  运动到远心点  $r_{\max}$ , 再回到  $r_{\min}$  的过程;  $\theta$  方向的一个周期可以表示为从赤道面  $\theta = \pi/2$  运动到最高点  $\theta_{\min}$ , 再回到赤道面  $\theta = \pi/2$ , 再运动到最低点  $\pi - \theta_{\min}$ , 再回到赤道面  $\theta = \pi/2$  的过程。这些过程中所经历的 Mino 时可以表示为

$$\Lambda_r = \oint \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{R(r)}}, \quad \Lambda_\theta = \oint \frac{d \cos \theta}{\sqrt{\Theta(\cos \theta)}} = 4 \int_0^{\cos \theta_{\min}} \frac{d \cos \theta}{\sqrt{\Theta(\cos \theta)}}. \quad (3.29)$$

这两个方向的 Mino 频率自然地定义为

$$\Upsilon_r = \frac{2\pi}{\Lambda_r}, \quad \Upsilon_\theta = \frac{2\pi}{\Lambda_\theta}. \quad (3.30)$$

对于  $t$  和  $\varphi$  方向, 我们从(3.14)出发, 直接对  $d\lambda$  积分得

$$t(\lambda) = \Gamma\lambda + t^{(r)}(\lambda) + t^{(\theta)}(\lambda) = \Gamma\lambda + \Delta t, \quad (3.31)$$

$$\varphi(\lambda) = \Upsilon_\varphi\lambda + \varphi^{(r)}(\lambda) + \varphi^{(\theta)}(\lambda) = \Upsilon_\varphi\lambda + \Delta\varphi,$$

其中  $\Gamma$  和  $\Upsilon_\varphi$  是  $t$  和  $\varphi$  关于 Mino 时  $\lambda$  的频率, 表达式如下:

$$\Gamma = \Upsilon_{t^{(r)}} + \Upsilon_{t^{(\theta)}} + a\mathcal{L}_z, \quad \Upsilon_\varphi = \Upsilon_{\varphi^{(r)}} + \Upsilon_{\varphi^{(\theta)}} - a\mathcal{E},$$

$$\Upsilon_{t^{(r)}} = \langle T_r(r) \rangle_\lambda, \quad \Upsilon_{t^{(\theta)}} = \langle T_\theta(\cos \theta) \rangle_\lambda, \quad (3.32)$$

$$\Upsilon_{\varphi^{(r)}} = \langle \Phi_r(r) \rangle_\lambda, \quad \Upsilon_{\varphi^{(\theta)}} = \langle \Phi_\theta(\cos \theta) \rangle_\lambda,$$

此处的

$$\langle \dots \rangle_\lambda \equiv \lim_{\Delta\lambda \rightarrow \infty} (2\Delta\lambda)^{-1} \int_{-\Delta\lambda}^{\Delta\lambda} d\lambda \dots \quad (3.33)$$

表示长时间的平均。 $t^{(r)/(\theta)}$  和  $\varphi^{(r)/(\theta)}$  满足

$$\begin{aligned} \frac{dt^{(r)}}{d\lambda} &= T_r(r) - \Upsilon_{t^{(r)}}, & \frac{dt^{(\theta)}}{d\lambda} &= T_\theta(\cos\theta) - \Upsilon_{t^{(\theta)}}, \\ \frac{d\varphi^{(r)}}{d\lambda} &= \Phi_r(r) - \Upsilon_{\varphi^{(r)}}, & \frac{d\varphi^{(\theta)}}{d\lambda} &= \Phi_\theta(\cos\theta) - \Upsilon_{\varphi^{(\theta)}}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

(3.31)式表明  $t(\lambda)$  和  $\varphi(\lambda)$  由两部分组成，第一部分是随着 Mino 时  $\lambda$  的积累的相位，剩下的两项表示在第一项附近的小振动，它们的频率分别为  $2\pi/\Upsilon_r$  和  $2\pi/\Upsilon_\theta$ 。Mino 时  $\lambda$  是为了方便计算而选定的，无穷远处观测者真正看到的频率是坐标时  $t$  下的频率，它们之间相差的正是等效的 Lorentz 因子  $\Gamma$ ，即

$$\Omega_r = \frac{\Upsilon_r}{\Gamma}, \quad \Omega_\theta = \frac{\Upsilon_\theta}{\Gamma}, \quad \Omega_\varphi = \frac{\Upsilon_\varphi}{\Gamma}. \quad (3.35)$$

在上一小节中，我们通过 turning points 的定义得到了  $R(r)$  和  $\Theta(\cos\theta)$  各自的两个零点(3.17)。根据(3.11)的定义，它们分别为  $r$  和  $\cos\theta$  的 4 次函数，这启发我们将其  $R(r)$  和  $\Theta(\cos\theta)$  进一步写成

$$R(r) = (1 - \mathcal{E}^2)(r_1 - r)(r - r_2)(r - r_3)(r - r_4), \quad (3.36a)$$

$$\Theta(\theta) = \mathcal{L}_z^2 \epsilon_0 (z_- - \cos^2\theta)(z_+ - \cos^2\theta), \quad (3.36b)$$

其中

$$\begin{aligned} r_1 &= r_{\max}, & r_2 &= r_{\min}, & r_3 &= \frac{(A+B) + \sqrt{(A+B)^2 - 4AB}}{2}, & r_4 &= \frac{AB}{r_3}, \\ A+B &= \frac{2M}{1-\mathcal{E}^2} - (r_1 + r_2), & AB &= \frac{a^2 Q}{(1-\mathcal{E}^2)r_1 r_2}, \\ \epsilon_0 &= \frac{a^2(1-\mathcal{E}^2)}{\mathcal{L}_z^2}, & z_- &= \cos^2\theta_{\min}, & z_+ &= \frac{Q}{\mathcal{L}_z^2 \epsilon_0 z_-}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

看似  $r = r_3$ ,  $r = r_4$  以及  $\cos\theta = \pm\sqrt{z_+}$  也是  $R(r)$  和  $\Theta(\cos\theta)$  的零点，但物理上它们是达不到的，因此它们不是 turning points。于是，(3.29)中定义的 Mino 周期可以解析地表示为

$$\begin{aligned} \int_{r_2}^r \frac{dr'}{\sqrt{R(r')}} &= \frac{2}{\sqrt{(1-\mathcal{E}^2)(r_1-r_3)(r_2-r_4)}} F(\arcsin y_r, k_r), \\ \int_0^{\cos\theta} \frac{d\cos\theta'}{\sqrt{\Theta(\cos\theta')}} &= \frac{1}{\mathcal{L}_z \sqrt{\epsilon_0 z_+}} F(\arcsin y_\theta, k_\theta), \end{aligned} \quad (3.38)$$

其中

$$y_r = \sqrt{\frac{r_1 - r_3}{r_1 - r_2} \frac{r - r_2}{r - r_3}}, \quad k_r = \sqrt{\frac{r_1 - r_2}{r_1 - r_3} \frac{r_3 - r_4}{r_2 - r_4}}, \quad y_\theta = \frac{\cos \theta}{\sqrt{z_-}}, \quad k_\theta = \sqrt{\frac{z_-}{z_+}}, \quad (3.39)$$

$F(\varphi, k)$  是第一类不完全椭圆积分, 定义为

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\sin \varphi} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}}. \quad (3.40)$$

则  $r$  和  $\theta$  方向的 Mino 频率可以解析地表示为

$$\Upsilon_r = \frac{\pi \sqrt{(1 - \mathcal{E}^2)(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}}{2K(k_r)}, \quad \Upsilon_\theta = \frac{\pi \mathcal{L}_z \sqrt{\epsilon_0 z_+}}{2K(k_\theta)}, \quad (3.41)$$

其中  $K(k) \equiv F(\pi/2, k)$  代表第一类完全椭圆积分。接下来推导  $t, \varphi$  方向的 Mino 频率(3.32)。由于  $r, \theta$  方向的 Mino 测地线方程是解耦的, 并且我们已经知道它们都是周期性的, 因此  $\langle \dots \rangle_\lambda$  即为每一个周期内的平均

$$\begin{aligned} \Upsilon_{t(r)} &= \frac{2}{\Lambda_r} \int_{r_2}^{r_1} \frac{T_r(r)}{\sqrt{R(r)}} dr, & \Upsilon_{t(\theta)} &= \frac{4}{\Lambda_\theta} \int_0^{\sqrt{z_-}} \frac{T_\theta(\cos \theta)}{\sqrt{\Theta(\cos \theta)}} d \cos \theta, \\ \Upsilon_{\varphi(r)} &= \frac{2}{\Lambda_r} \int_{r_2}^{r_1} \frac{\Phi_r(r)}{\sqrt{R(r)}} dr, & \Upsilon_{\varphi(\theta)} &= \frac{4}{\Lambda_\theta} \int_0^{\sqrt{z_-}} \frac{\Phi_\theta(\cos \theta)}{\sqrt{\Theta(\cos \theta)}} d \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.42)$$

其中,  $\Upsilon_{t(\theta)}, \Upsilon_{\varphi(\theta)}$  可以表示成椭圆积分的形式

$$\Upsilon_{t(\theta)} = -\frac{2a^2 \mathcal{E} \Upsilon_\theta}{\pi \mathcal{L}_z \sqrt{\epsilon_0 z_+}} [(1 - z_+)K(k_\theta) + z_+ E(k_\theta)], \quad (3.43a)$$

$$\Upsilon_{\varphi(\theta)} = \frac{2\Upsilon_\theta}{\pi \sqrt{\epsilon_0 z_+}} \Pi(-z_-, k_\theta), \quad (3.43b)$$

其中  $E(\varphi, k)$  为第二类不完全椭圆积分,  $\Pi(\varphi, c, k)$  为第三类不完全椭圆积分, 它们的定义如下

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad (3.44a)$$

$$\Pi(\varphi, c, k) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{(1 + c \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}. \quad (3.44b)$$

取  $\varphi = \pi/2$  得到第二类完全椭圆积分  $E(k) \equiv E(\pi/2, k)$  和第三类完全椭圆积分  $\Pi(c, k) \equiv \Pi(\pi/2, c, k)$ 。另一方面, 我们必须重写一下  $T_r(r), \Phi_r(r)$  的表达式, 从而能够用椭圆积分表示

$\Upsilon_{t(r)}$  和  $\Upsilon_{\varphi(r)}$ , 即

$$\begin{aligned}
 T_r(r) &= \mathcal{E}r^2 + 2M\mathcal{E}r + \frac{2M}{r_+ - r_-} \left[ \frac{(4M^2\mathcal{E} - a\mathcal{L}_z)r_+ - 2Ma^2\mathcal{E}}{r - r_+} - (+ \leftrightarrow -) \right] \\
 &\quad + (a^2 + 4M^2)\mathcal{E} - a\mathcal{L}_z \quad (|a| \neq M), \\
 &= \mathcal{E}r^2 + 2M\mathcal{E}r + \frac{2M(4M^2\mathcal{E} - a\mathcal{L}_z)}{r - M} + \frac{2M^2(2M^2\mathcal{E} - a\mathcal{L}_z)}{(r - M)^2} \\
 &\quad + (a^2 + 4M^2)\mathcal{E} - a\mathcal{L}_z \quad (|a| = M), \\
 \Phi_r(r) &= \frac{a}{r_+ - r_-} \left[ \frac{2M\mathcal{E}r_+ - a\mathcal{L}_z}{r - r_+} - (+ \leftrightarrow -) \right] + a\mathcal{E} \quad (|a| = M), \\
 &= \frac{2Ma\mathcal{E}}{r - M} + \frac{a(2M^2\mathcal{E} - a\mathcal{L}_z)}{(r - M)^2} + a\mathcal{E} \quad (|a| = M),
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

其中  $(+ \leftrightarrow -)$  指的是把  $r_+$  与  $r_-$  调换。这里提醒读者, 它们是  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$  的根  $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ 。根据(3.39)式的定义, 我们有

$$r = r_3 + \frac{r_2 - r_3}{1 - h_r y_r^2}, \quad h_r = \frac{r_1 - r_2}{r_1 - r_3}. \tag{3.46}$$

于是计算  $\Upsilon_{t(r)}$  中所包含的表达式

$$\int_{r_2}^r \frac{r'}{\sqrt{R(r')}} dr' = \frac{2[r_3 F(\arcsin y_r, k_r) + (r_2 - r_3)\Pi(\arcsin y_r, -h_r, k_r)]}{\sqrt{(1 - \mathcal{E}^2)(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}} \tag{3.47}$$

就变得十分直接。  $\int_{r_2}^r T_r(r)/\sqrt{R(r)} dr$  的其他项推导如下:

$$\frac{1}{r - r_{\pm}} = \frac{1}{r_3 - r_{\pm}} \left[ 1 - \frac{r_2 - r_3}{r_2 - r_{\pm}} \frac{1}{1 - h_{\pm} y_r^2} \right], \tag{3.48a}$$

$$r^2 = r_3^2 + \frac{(r_2 - r_3)(r_2 + 3r_3)}{2} \frac{1}{1 - h_y y_r^2} + \frac{(r_2 - r_3)^2}{4h_r} \left[ \frac{1}{(y_r - h_r^{-1/2})^2} + \frac{1}{(y_r + h_r^{-1/2})^2} \right], \tag{3.48b}$$

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{r_3 - M}{r - M} \right)^2 &= 1 + \frac{1}{2} \frac{r_2 - r_3}{r_2 - M} \left( \frac{r_2 - r_3}{r_2 - M} - 4 \right) \frac{1}{1 - h_M y_r^2} \\
 &\quad + \frac{1}{4h_M} \left( \frac{r_2 - r_3}{r_2 - M} \right)^2 \left[ \frac{1}{(y_r - h_M^{-1/2})^2} + \frac{1}{(y_r + h_M^{-1/2})^2} \right],
 \end{aligned} \tag{3.48c}$$

其中

$$h_M = \frac{(r_1 - r_2)(r_3 - M)}{(r_1 - r_3)(r_2 - M)}, \quad h_{\pm} = \frac{(r_1 - r_2)(r_3 - r_{\pm})}{(r_1 - r_3)(r_2 - r_{\pm})}. \tag{3.49}$$

于是可以直接计算

$$\begin{aligned}
 \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr'}{(r' - r_{\pm})\sqrt{R(r')}} &= \frac{2}{(r_3 - r_{\pm})\sqrt{(1 - \mathcal{E}^2)(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}} \left[ F(\arcsin y_r, k_r) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{r_2 - r_3}{r_2 - r_{\pm}} \Pi(\arcsin y_r, -h_{\pm}, k_r) \right].
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

此外，我们还需要  $\int_{r_2}^r (r')^2 dr' / \sqrt{R(r')}$  和  $\int_{r_2}^r dr' / \{(r' - M)^2 \sqrt{R(r')}\}$ 。如果我们设

$$J_n[c] = \int_0^y \frac{dy'}{(y' - c)^n \sqrt{\varphi(y')}} \quad (3.51)$$

其中

$$\varphi(y) = (1 - y^2)(1 - k_r^2 y^2). \quad (3.52)$$

我们可以用  $J_2[c] + J_2[-c]$  表示这些项。我们可以将  $J_2[c] + J_2[-c]$  表示为椭圆积分

$$J_2[c] + J_2[-c] = \frac{2}{\varphi(c)} \left\{ \left[ (2c^2 - 1)k_r^2 - 1 \right] \Pi(\psi, -c^{-2}, k_r) + (1 - k_r^2 c^2) F(\psi, k_r) \right. \\ \left. - E(\psi, k_r) - \left[ \frac{y\sqrt{\varphi(y)}}{y^2 - c^2} \right]_0^y \right\}, \quad (3.53)$$

其中  $\psi = \arcsin y$ ，于是我们可以得到

$$\int_{r_2}^r \frac{(r')^2}{\sqrt{R(r')}} dr' = \frac{2}{\sqrt{(1 - \mathcal{E}^2)(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}} \left[ \frac{(r_3(r_1 + r_2 + r_3) - r_1 r_2)}{2} F(\arcsin y_r, k_r) \right. \\ \left. + \frac{(r_2 - r_3)(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)}{2} \Pi(\arcsin y_r, -h_r, k_r) \right. \\ \left. + \frac{(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}{2} E(\arcsin y_r, k_r) \right. \\ \left. + \frac{(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}{2} \frac{y_r \sqrt{(1 - y_r^2)(1 - k_r^2 y_r^2)}}{y_r^2 - h_r^{-1}} \right], \quad (3.54)$$

$$\int_{r_2}^r \frac{(r_3 - M)^2}{(r' - M)^2 \sqrt{R(r')}} dr' = \frac{2}{\sqrt{(1 - \mathcal{E}^2)(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}} \\ \times \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{(r_1 - r_3)(r_2 - r_3)}{(r_1 - M)(r_2 - M)} \right] F(\arcsin y_r, k_r) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{r_2 - r_3}{r_2 - M} \left[ \frac{r_1 - r_3}{r_1 - M} + \frac{r_2 - r_3}{r_2 - M} + \frac{r_4 - r_3}{r_4 - M} - 4 \right] \right. \\ \left. \times \Pi(\arcsin y_r, -h_M, k_r) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)(r_3 - M)}{(r_1 - M)(r_2 - M)(r_4 - M)} E(\arcsin y_r, k_r) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)(r_3 - M)}{(r_1 - M)(r_2 - M)(r_4 - M)} \frac{y_r \sqrt{(1 - y_r^2)(1 - k_r^2 y_r^2)}}{y_r^2 - h_M^{-1}} \right\}. \quad (3.55)$$

得到了这些，我们就可以计算剩下的两个 Mino 频率  $\Gamma$  和  $\Upsilon_\varphi$  的解析表达式

$$\begin{aligned}
 \Gamma = & 4M^2\mathcal{E} + \frac{2a^2\mathcal{E}z_+\Upsilon_\theta}{\pi\mathcal{L}_z\sqrt{\epsilon_0z_+}}[K(k_\theta) - E(k_\theta)] + \frac{2\Upsilon_r}{\pi\sqrt{(1-\mathcal{E}^2)(r_1-r_3)(r_2-r_4)}} \\
 & \times \left\{ \frac{\mathcal{E}}{2}[(r_3(r_1+r_2+r_3) - r_1r_2)K(k_r) \right. \\
 & + (r_2-r_3)(r_1+r_2+r_3+r_4)\Pi(-h_r, k_r)] \\
 & + (r_1-r_3)(r_2-r_4)E(k_r) + 2M\mathcal{E}[r_3K(k_r) + (r_2-r_3)\Pi(-h_r, k_r)] \\
 & + \frac{2M}{r_+-r_-} \left[ \frac{(4M^2\mathcal{E} - a\mathcal{L}_z)r_+ - 2Ma^2\mathcal{E}}{r_3-r_+} \left( K(k_r) - \frac{r_2-r_3}{r_2-r_+} \Pi(-h_+, k_r) \right) \right. \\
 & \left. \left. - (+ \leftrightarrow -) \right] \right\}, \tag{3.56}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Upsilon_\varphi = & \frac{2\Upsilon_\theta}{\pi\sqrt{\epsilon_0z_+}}\Pi(-z_-, k_\theta) + \frac{2a\Upsilon_r}{\pi(r_+-r_-)\sqrt{(1-\mathcal{E}^2)(r_1-r_3)(r_2-r_4)}} \\
 & \times \left\{ \frac{2M\mathcal{E}r_+ - a\mathcal{L}_z}{r_3-r_+} \left[ K(k_r) - \frac{r_2-r_3}{r_2-r_+} \Pi(-h_+, k_r) \right] - (+ \leftrightarrow -) \right\}. \tag{3.57}
 \end{aligned}$$

### 1.2.3 轨道表达式 (本节内容主要出自 Fujita & Hikida 2009 [137])

在这一节，我们将解析地推导粒子世界线的表达式  $r(\lambda), \cos\theta(\lambda), t(\lambda), \varphi(\lambda)$ ，并用椭圆积分表示它们。上一节中，我们已经推导了轨道频率的表达式，只要将完全椭圆积分替换为相应的不完全椭圆积分即可得到粒子的轨迹，但是我们得先选定一组初始的  $r, \theta$  并考虑  $dr/d\lambda$  和  $d\cos\theta/d\lambda$  在某个给定的 Mino 时  $\lambda$  的符号。

首先我们来推导径向解  $r(\lambda), t^{(r)}(\lambda), \varphi^{(r)}(\lambda)$ ：它们来自对  $r$  方向测地线方程和(3.34)的直接积分

$$\begin{aligned}
 \lambda(r) &= \int^r \frac{dr'}{\sqrt{R(r')}}, \\
 t^{(r)}(\lambda) &= \int^{r(\lambda)} \frac{T_r(r') - \Upsilon_{t^{(r)}}}{\sqrt{R(r')}} dr', \\
 \varphi^{(r)}(\lambda) &= \int^{r(\lambda)} \frac{\Phi_r(r') - \Upsilon_{\varphi^{(r)}}}{\sqrt{R(r')}} dr'. \tag{3.58}
 \end{aligned}$$

通过对  $\lambda(r)$  求反函数来得到  $r(\lambda)$ ，由于  $r$  在 Mino 时间  $\lambda$  下的周期为  $\Lambda_r = 2\pi/\Upsilon_r$ ，我们将  $\lambda$  映射到

$$\lambda^{(r)} = \lambda - \frac{2\pi}{\Upsilon_r} \left[ \frac{\Upsilon_r \lambda}{2\pi} \right], \tag{3.59}$$

其中  $[\dots]$  代表向下取整, 即 **floor function**。为了进行积分, 我们需要首先确定积分起点  $r(\lambda = 0)$  和初始条件  $dr(0)/d\lambda \geq 0$  或  $dr(0)/d\lambda \leq 0$ , 下面将分两种情况讨论。

首先考虑  $dr(0)/d\lambda \geq 0$  的情形。我们设积分起点  $r(\lambda = 0) = r_0^{(1)}$ , 则积分路径为  $r_0^{(1)} \rightarrow r_1 \rightarrow r_2 \rightarrow r_0^{(1)}$ , 于是  $\lambda(r)$  可以表示成

$$\begin{aligned}\lambda^{(r)}(r) &= \int_{r_0^{(1)}}^r \frac{dr'}{\sqrt{R(r')}} \\ &= \left[ \int_{r_2}^r - \int_{r_2}^{r_0^{(1)}} \right] \frac{dr'}{\sqrt{R(r')}} & r : r_0^{(1)} \rightarrow r_1, \\ &= \left[ - \int_{r_2}^r + 2 \int_{r_2}^{r_1} - \int_{r_2}^{r_0^{(1)}} \right] \frac{dr'}{\sqrt{R(r')}} & r : r_1 \rightarrow r_2, \\ &= \left[ \int_{r_2}^r + 2 \int_{r_2}^{r_1} - \int_{r_2}^{r_0^{(1)}} \right] \frac{dr'}{\sqrt{R(r')}} & r : r_2 \rightarrow r_0^{(1)}.\end{aligned}\tag{3.60}$$

所以这个解可以写为

$$\lambda^{(r)}(r) = \begin{cases} \lambda_0^{(r)}(r) - \Lambda_r^{(1)} & r : r_0^{(1)} \rightarrow r_1, \\ -\lambda_0^{(r)}(r) + \Lambda_r - \Lambda_r^{(1)} & r : r_1 \rightarrow r_2, \\ \lambda_0^{(r)}(r) + \Lambda_r - \Lambda_r^{(1)} & r : r_2 \rightarrow r_0^{(1)}, \end{cases}\tag{3.61}$$

其中

$$\lambda_0^{(r)}(r) = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathcal{E}^2}} \frac{2}{\sqrt{(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}} F(\arcsin y_r, k_r), \quad \Lambda_r^{(1)} = \lambda_0^{(r)}(r_0^{(1)}).\tag{3.62}$$

取(3.61)的反函数得

$$r(\lambda) = \frac{r_3(r_1 - r_2) \operatorname{sn}^2(u_r(\lambda), k_r) - r_2(r_1 - r_3)}{(r_1 - r_2) \operatorname{sn}^2(u_r(\lambda), k_r) - (r_1 - r_3)},\tag{3.63}$$

其中  $\operatorname{sn}(u, k)$  是 Jacobi 椭圆积分, 它是第一类不完全椭圆积分  $u = F(\varphi, k)$  的反函数, 这里

$$u_r(\lambda) = \begin{cases} 2K(k_r) (\lambda^{(r)} + \Lambda_r^{(1)}) / \Lambda_r & (0 \leq \lambda^{(r)} \leq \Lambda_r/2 - \Lambda_r^{(1)}), \\ 2K(k_r) (-\lambda^{(r)} + \Lambda_r - \Lambda_r^{(1)}) / \Lambda_r & (\Lambda_r/2 - \Lambda_r^{(1)} \leq \lambda^{(r)} \leq \Lambda_r - \Lambda_r^{(1)}), \\ 2K(k_r) (\lambda^{(r)} - \Lambda_r + \Lambda_r^{(1)}) / \Lambda_r & (\Lambda_r - \Lambda_r^{(1)} \leq \lambda^{(r)} \leq \Lambda_r). \end{cases}\tag{3.64}$$

结合之前推导得到的结果, 我们还可以得到

$$\begin{aligned}t^{(r)} &= \frac{2}{\sqrt{(1 - \mathcal{E}^2)(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}} \\ &\times \left\{ \frac{\mathcal{E}}{2} [(r_2 - r_3)(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)] \tilde{\Pi}_r(\psi_r, -h_r, k_r) \right.\end{aligned}\tag{3.65a}$$

$$\begin{aligned}
 & + (r_1 - r_3)(r_2 - r_4) \tilde{E}_r(\psi_r, h_r, k_r) \Big] + 2M\mathcal{E}(r_2 - r_3) \tilde{\Pi}_r(\psi_r, -h_r, k_r) \\
 & - \frac{2M}{r_+ - r_-} \left[ \frac{(4M^2\mathcal{E} - a\mathcal{L}_z)r_+ - 2Ma^2\mathcal{E}}{r_3 - r_+} \frac{r_2 - r_3}{r_2 - r_+} \tilde{\Pi}_r(\psi_r, -h_+, k_r) - (+ \leftrightarrow -) \right] \Big\}, \\
 \varphi^{(r)} = & - \frac{2a}{(r_+ - r_-) \sqrt{(1 - \mathcal{E}^2)(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}} \left[ \frac{(2M\mathcal{E}r_+ - a\mathcal{L}_z)(r_2 - r_3)}{(r_3 - r_+)(r_2 - r_+)} \tilde{\Pi}_r(\psi_r, -h_+, k_r) \right. \\
 & \left. - (+ \leftrightarrow -) \right], \tag{3.65b}
 \end{aligned}$$

其中  $\psi_r = \arcsin[\text{sn}(u_r, k_r)]$ ,  $\tilde{E}_r(\psi_r, c, k_r) = E_r(\psi_r, c, k_r) - \frac{\Upsilon_r \lambda^{(r)}}{\pi} E(k_r)$ ,  $\tilde{\Pi}_r(\psi_r, c, k_r) = \Pi_r(\psi_r, c, k_r) - \frac{\Upsilon_r \lambda^{(r)}}{\pi} \Pi(c, k_r)$ , 以及新定义的  $r$  椭圆函数

$$\begin{aligned}
 E_r^{(0)}(\psi_r, c, k_r) &= E(\psi_r, k_r) + \frac{\sin \psi_r \sqrt{(1 - \sin^2 \psi_r)(1 - k_r^2 \sin^2 \psi_r)}}{\sin^2 \psi_r - c^{-1}} \\
 E_r(\psi_r, c, k_r) &= E_r^{(0)}(\psi_r, c, k_r) - E_r^{(0)}(\psi_r(0), c, k_r) \\
 &\quad \text{for } 0 \leq \lambda^{(r)} \leq \Lambda_r/2 - \Lambda_r^{(1)}, \\
 &= -E_r^{(0)}(\psi_r, c, k_r) + 2E(k_r) - E_r^{(0)}(\psi_r(0), c, k_r) \\
 &\quad \text{for } \Lambda_r/2 - \Lambda_r^{(1)} \leq \lambda^{(r)} \leq \Lambda_r - \Lambda_r^{(1)}, \\
 &= E_r^{(0)}(\psi_r, c, k_r) + 2E(k_r) - E_r^{(0)}(\psi_r(0), c, k_r) \\
 &\quad \text{for } \Lambda_r - \Lambda_r^{(1)} \leq \lambda^{(r)} \leq \Lambda_r, \tag{3.66} \\
 \Pi_r(\psi_r, c, k_r) &= \Pi(\psi_r, c, k_r) - \Pi(\psi_r(0), c, k_r) \\
 &\quad \text{for } 0 \leq \lambda^{(r)} \leq \Lambda_r/2 - \Lambda_r^{(1)}, \\
 &= -\Pi(\psi_r, c, k_r) + 2\Pi(c, k_r) - \Pi(\psi_r(0), c, k_r) \\
 &\quad \text{for } \Lambda_r/2 - \Lambda_r^{(1)} \leq \lambda^{(r)} \leq \Lambda_r - \Lambda_r^{(1)}, \\
 &= \Pi(\psi_r, c, k_r) + 2\Pi(c, k_r) - \Pi(\psi_r(0), c, k_r) \\
 &\quad \text{for } \Lambda_r - \Lambda_r^{(1)} \leq \lambda^{(r)} \leq \Lambda_r.
 \end{aligned}$$

然后考虑  $dr(0)/d\lambda \leq 0$  的情形, 设积分起点  $r(\lambda = 0) = r_0^{(2)}$ , 积分路径为  $r_0^{(2)} \rightarrow r_2 \rightarrow r_1 \rightarrow r_0^{(2)}$ , 于是  $\lambda(r)$  可以表示成

$$\begin{aligned}
 \lambda^{(r)}(r) &= \int_{r_0^{(2)}}^r \frac{dr'}{\sqrt{R(r')}} \\
 &= \left[ -\int_{r_2}^r + \int_{r_2}^{r_0^{(2)}} \right] \frac{dr'}{\sqrt{R(r')}} && r : r_0^{(2)} \rightarrow r_2, \tag{3.67} \\
 &= \left[ \int_{r_2}^r + \int_{r_2}^{r_0^{(2)}} \right] \frac{dr'}{\sqrt{R(r')}} && r : r_2 \rightarrow r_1,
 \end{aligned}$$

$$= \left[ -\int_{r_2}^r + 2\int_{r_2}^{r_1} + \int_{r_2}^{r_0^{(2)}} \right] \frac{dr'}{\sqrt{R(r')}} \quad r : r_1 \rightarrow r_0^{(2)}.$$

于是我们找到解：

$$\lambda^{(r)}(r) = \begin{cases} -\lambda_0^{(r)}(r) + \Lambda_r^{(2)} & r : r_0^{(2)} \rightarrow r_2 \\ \lambda_0^{(r)}(r) + \Lambda_r^{(2)} & r : r_2 \rightarrow r_1 \\ -\lambda_0^{(r)}(r) + \Lambda_r + \Lambda_r^{(2)} & r : r_1 \rightarrow r_0^{(2)} \end{cases} \quad (3.68)$$

其中  $\Lambda_r^{(2)} = \lambda_0^{(r)}(r_0^{(2)})$ ，同样地求反函数得到(3.63)，但是  $u_r(\lambda)$  得表达式要修正

$$u_r(\lambda) = \begin{cases} 2K(k_r) \left( -\lambda^{(r)} + \Lambda_r^{(2)} \right) / \Lambda_r & \left( 0 \leq \lambda^{(r)} \leq \Lambda_r^{(2)} \right), \\ 2K(k_r) \left( \lambda^{(r)} - \Lambda_r^{(2)} \right) / \Lambda_r & \left( \Lambda_r^{(2)} \leq \lambda^{(r)} \leq \Lambda_r/2 + \Lambda_r^{(2)} \right), \\ 2K(k_r) \left( -\lambda^{(r)} + \Lambda_r + \Lambda_r^{(2)} \right) / \Lambda_r & \left( \Lambda_r/2 + \Lambda_r^{(2)} \leq \lambda^{(r)} \leq \Lambda_r \right). \end{cases} \quad (3.69)$$

$t^{(r)}, \varphi^{(r)}$  的表达式也与之前得到的(3.65)相同，但是  $E_r(\psi_r, c, k_r)$  和  $\Pi_r(\psi_r, c, k_r)$  的表达式要进行如下修改

$$\begin{aligned} E_r(\psi_r, c, k_r) &= -E_r^{(0)}(\psi_r, c, k_r) + E_r^{(0)}(\psi_r(0), c, k_r) \\ &\quad \text{for } 0 \leq \lambda^{(r)} \leq \Lambda_r^{(2)}, \\ &= E_r^{(0)}(\psi_r, c, k_r) + E_r^{(0)}(\psi_r(0), c, k_r) \\ &\quad \text{for } \Lambda_r^{(2)} \leq \lambda^{(r)} \leq \Lambda_r/2 + \Lambda_r^{(2)}, \\ &= -E_r^{(0)}(\psi_r, c, k_r) + 2E(k_r) + E_r^{(0)}(\psi_r(0), c, k_r) \\ &\quad \text{for } \Lambda_r/2 \leq \lambda^{(r)} \leq \Lambda_r, \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \Pi_r(\psi_r, c, k_r) &= -\Pi(\psi_r, c, k_r) + \Pi(\psi_r(0), c, k_r) \\ &\quad \text{for } 0 \leq \lambda^{(r)} \leq \Lambda_r^{(2)}, \\ &= -\Pi(\psi_r, c, k_r) + \Pi(\psi_r(0), c, k_r) \\ &\quad \text{for } \Lambda_r^{(2)} \leq \lambda^{(r)} \leq \Lambda_r/2 + \Lambda_r^{(2)}, \\ &= -\Pi(\psi_r, c, k_r) + 2\Pi(c, k_r) + \Pi(\psi_r(0), c, k_r) \\ &\quad \text{for } \Lambda_r/2 + \Lambda_r^{(2)} \leq \lambda^{(r)} \leq \Lambda_r. \end{aligned}$$

接下来看极向解，通过解  $\theta$  向测地线方程和(3.34)另外两式得到  $\lambda(\cos \theta), t^{(\theta)}(\lambda), \varphi^{(\theta)}(\lambda)$

$$\lambda(\theta) = \int^{\cos \theta} \frac{d \cos \theta'}{\sqrt{\Theta(\cos \theta')}}, \quad (3.71a)$$

$$t^{(\theta)}(\lambda) = \int^{\cos \theta} \frac{T_{\theta}(\cos \theta') - \Upsilon_{t^{(\theta)}}}{\sqrt{\Theta(\cos \theta')}} d \cos \theta', \quad (3.71b)$$

$$\phi^{(\theta)}(\lambda) = \int^{\cos \theta} \frac{\Phi_{\theta}(\cos \theta') - \Upsilon_{\phi^{(\theta)}}}{\sqrt{\Theta(\cos \theta')}} d \cos \theta'. \quad (3.71c)$$

我们推导  $\cos(\lambda)$  的表达式, 然后求反函数得到  $\lambda(\theta)$ 。由于  $\theta$  运动的周期为  $\Lambda_{\theta} = 2\pi/\Upsilon_{\theta}$ , 我们将  $\lambda$  映射到

$$\lambda^{(\theta)} = \lambda - \frac{2\pi}{\Upsilon_{\theta}} \left[ \frac{\Upsilon_{\theta} \lambda}{2\pi} \right]. \quad (3.72)$$

同样地, 我们还是要考虑积分起点和初始条件。首先考虑  $d \cos(0)/d\lambda \geq 0$  的情形, 设  $\theta(\lambda = 0) = \theta_0^{(1)}$ , 则  $\lambda(\theta)$  的表达式如下:

$$\begin{aligned} \lambda^{(\theta)}(\theta) &= \int_{\cos \theta_0^{(1)}}^{\cos \theta} \frac{d \cos \theta'}{\sqrt{\Theta(\cos \theta')}} \\ &= \left[ \int_0^{\cos \theta} - \int_0^{\cos \theta_0^{(1)}} \right] \frac{d \cos \theta'}{\sqrt{\Theta(\cos \theta')}} && \theta : \theta_0^{(1)} \rightarrow \theta_{\min}, \\ &= \left[ - \int_0^{\cos \theta} + 2 \int_0^{\cos \theta_{\min}} - \int_0^{\cos \theta_0^{(1)}} \right] \frac{d \cos \theta'}{\sqrt{\Theta(\cos \theta')}} && \theta : \theta_{\min} \rightarrow \pi - \theta_{\min}, \\ &= \left[ \int_0^{\cos \theta} + 4 \int_0^{\cos \theta_{\min}} - \int_0^{\cos \theta_0^{(1)}} \right] \frac{d \cos \theta'}{\sqrt{\Theta(\cos \theta')}} && \theta : \pi - \theta_{\min} \rightarrow \theta_0^{(1)}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

积分得到

$$\lambda^{(\theta)}(\theta) = \begin{cases} \lambda_0^{(\theta)}(\theta) - \Lambda_{\theta}^{(1)} & \theta : \theta_0^{(1)} \rightarrow \theta_{\min}, \\ -\lambda_0^{(\theta)}(\theta) + \Lambda_{\theta}/2 - \Lambda_{\theta}^{(1)} & \theta : \theta_{\min} \rightarrow \pi - \theta_{\min}, \\ \lambda_0^{(\theta)}(\theta) + \Lambda_{\theta} - \Lambda_{\theta}^{(1)} & \theta : \pi - \theta_{\min} \rightarrow \theta_0^{(1)}, \end{cases} \quad (3.74)$$

其中

$$\lambda_0^{(\theta)}(\theta) = \frac{1}{\mathcal{L}_z \sqrt{\epsilon_0 z_+}} F(\arcsin y_{\theta}, k_{\theta}), \quad \Lambda_{\theta}^{(1)} = \lambda_0^{(\theta)}(\theta_0^{(1)}). \quad (3.75)$$

对(3.74)求反函数得

$$\cos \theta(\lambda) = \sqrt{z_-} \operatorname{sn}(u_{\theta}(\lambda), k_{\theta}), \quad (3.76)$$

其中

$$u_{\theta}(\lambda) = \begin{cases} 4K(k_{\theta}) (\lambda^{(\theta)} + \Lambda_{\theta}^{(1)}) / \Lambda_{\theta} & (0 \leq \lambda^{(\theta)} \leq \Lambda_{\theta}/4 - \Lambda_{\theta}^{(1)}), \\ 4K(k_{\theta}) (-\lambda^{(\theta)} + \Lambda_{\theta}/2 - \Lambda_{\theta}^{(1)}) / \Lambda_{\theta} & (\Lambda_{\theta}/4 - \Lambda_{\theta}^{(1)} \leq \lambda^{(\theta)} \leq 3\Lambda_{\theta}/4 - \Lambda_{\theta}^{(1)}), \\ 4K(k_{\theta}) (\lambda^{(\theta)} - \Lambda_{\theta} + \Lambda_{\theta}^{(1)}) / \Lambda_{\theta} & (3\Lambda_{\theta}/4 - \Lambda_{\theta}^{(1)} \leq \lambda^{(\theta)} \leq \Lambda_{\theta}). \end{cases} \quad (3.77)$$

还可以推导  $t^{(\theta)}$  和  $\varphi^{(\theta)}$

$$\begin{aligned} t^{(\theta)} &= \frac{a^2 \mathcal{E} z_+}{\mathcal{L}_z \sqrt{\epsilon_0 z_+}} \left[ \frac{2\Upsilon_\theta \lambda^{(\theta)}}{\pi} E(k_\theta) - E_\theta(\psi_\theta, k_\theta) \right], \\ \phi^{(\theta)} &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 z_+}} \left[ \Pi_\theta(\psi_\theta, -z_-, k_\theta) - \frac{2\Upsilon_\theta \lambda^{(\theta)}}{\pi} \Pi(-z_-, k_\theta) \right], \end{aligned} \quad (3.78)$$

其中  $\psi_\theta = \arcsin[\text{sn}(u_\theta, k_\theta)]$ , 以及新定义的  $\theta$  椭圆函数

$$\begin{aligned} E_\theta(\psi_\theta, k_\theta) &= E(\psi_\theta, k_\theta) - E(\psi_\theta(0), k_\theta) \\ &\text{for } 0 \leq \lambda^{(\theta)} \leq \Lambda_\theta/4 - \Lambda_\theta^{(1)}, \\ &= -E(\psi_\theta, k_\theta) + 2E(k_\theta) - E(\psi_\theta(0), k_\theta) \\ &\text{for } \Lambda_\theta/4 - \Lambda_\theta^{(1)} \leq \lambda^{(\theta)} \leq 3\Lambda_\theta/4 - \Lambda_\theta^{(1)}, \\ &= E(\psi_\theta, k_\theta) + 4E(k_\theta) - E(\psi_\theta(0), k_\theta) \\ &\text{for } 3\Lambda_\theta/4 - \Lambda_\theta^{(1)} \leq \lambda^{(\theta)} \leq \Lambda_\theta, \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} \Pi_\theta(\psi_\theta, c, k_\theta) &= \Pi(\psi_\theta, c, k_\theta) - \Pi(\psi_\theta(0), c, k_\theta) \\ &\text{for } 0 \leq \lambda^{(\theta)} \leq \Lambda_\theta/4 - \Lambda_\theta^{(1)}, \\ &= \Pi(\psi_\theta, c, k_\theta) + 2\Pi(c, k_\theta) - \Pi(\psi_\theta(0), c, k_\theta) \\ &\text{for } \Lambda_\theta/4 - \Lambda_\theta^{(1)} \leq \lambda^{(\theta)} \leq 3\Lambda_\theta/4 - \Lambda_\theta^{(1)}, \\ &= \Pi(\psi_\theta, c, k_\theta) + \Pi(c, k_\theta) - \Pi(\psi_\theta(0), c, k_\theta) \\ &\text{for } 3\Lambda_\theta^{(1)}/4 - \Lambda_\theta^{(1)} \leq \lambda^{(\theta)} \leq \Lambda_\theta. \end{aligned} \quad (3.80)$$

然后是  $d \cos \theta(0)/d\lambda \leq 0$  的情况, 设  $\theta(\lambda = 0) = \theta_0^{(2)}$ , 于是  $\lambda(\theta)$  可以表示为:

$$\begin{aligned} \lambda^{(\theta)}(\theta) &= \int_{\cos \theta_0^{(2)}}^{\cos \theta} \frac{d \cos \theta'}{\sqrt{\Theta(\cos \theta')}}}, \\ &= \left[ -\int_0^{\cos \theta} + \int_0^{\cos \theta_0^{(2)}} \right] \frac{d \cos \theta'}{\sqrt{\Theta(\cos \theta')}}} \quad \theta : \theta_0^{(2)} \rightarrow \pi - \theta_{\min}, \\ &= \left[ \int_0^{\cos \theta} + 2 \int_0^{\cos \theta_{\min}} + \int_0^{\cos \theta_0^{(2)}} \right] \frac{d \cos \theta'}{\sqrt{\Theta(\cos \theta')}}} \quad \theta : \pi - \theta_{\min} \rightarrow \theta_{\min} \\ &= \left[ -\int_0^{\cos \theta} + 4 \int_0^{\cos \theta_{\min}} + \int_0^{\cos \theta_0^{(2)}} \right] \frac{d \cos \theta'}{\sqrt{\Theta(\cos \theta')}}} \quad \theta : \theta_{\min} \rightarrow \theta_0^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

积分得

$$\lambda^{(\theta)}(\theta) = \begin{cases} -\lambda_0^{(\theta)}(\theta) + \Lambda_\theta^{(2)} & \theta : \theta_0^{(2)} \rightarrow \pi - \theta_{\min}, \\ \lambda_0^{(\theta)}(\theta) + \Lambda_\theta/2 + \Lambda_\theta^{(2)} & \theta : \pi - \theta_{\min} \rightarrow \theta_{\min}, \\ -\lambda_0^{(\theta)}(\theta) + \Lambda_\theta + \Lambda_\theta^{(2)} & \theta : \theta_{\min} \rightarrow \theta_0^{(2)}. \end{cases} \quad (3.82)$$

其中  $\Lambda_\theta^{(2)} = \lambda_0^{(\theta)}(\theta_0^{(2)})$ , 求反函数得到的表达式与(3.76)相同, 但是  $u_\theta(\lambda)$  要修改一下:

$$u_\theta(\lambda) = \begin{cases} 4K(k_\theta) \left( -\lambda^{(\theta)} + \Lambda_\theta^{(2)} \right) / \Lambda_\theta & \left( 0 \leq \lambda^{(\theta)} \leq \Lambda_\theta/4 + \Lambda_\theta^{(2)} \right), \\ 4K(k_\theta) \left( \lambda^{(\theta)} - \Lambda_\theta/2 - \Lambda_\theta^{(2)} \right) / \Lambda_\theta & \left( \Lambda_\theta/4 + \Lambda_\theta^{(2)} \leq \lambda^{(\theta)} \leq 3\Lambda_\theta/4 + \Lambda_\theta^{(2)} \right), \\ 4K(k_\theta) \left( -\lambda^{(\theta)} + \Lambda_\theta + \Lambda_\theta^{(2)} \right) / \Lambda_\theta & \left( 3\Lambda_\theta/4 + \Lambda_\theta^{(2)} \leq \lambda^{(\theta)} \leq \Lambda_\theta \right). \end{cases} \quad (3.83)$$

$t^{(\theta)}, \varphi^{(\theta)}$  的表达式的形式也和(3.78)相同, 只是  $E_\theta(\psi_\theta, k_\theta)$  和  $\Pi_\theta(\psi_\theta, c, k_\theta)$  的表达式要修改为:

$$\begin{aligned} E_\theta(\psi_\theta, k_\theta) &= -E(\psi_\theta, k_\theta) + E(\psi_\theta(0), k_\theta) \\ &\quad \text{for } 0 \leq \lambda^{(\theta)} \leq \Lambda_\theta/4 + \Lambda_\theta^{(2)}, \\ &= E(\psi_\theta, k_\theta) + 2E(k_\theta) + E(\psi_\theta(0), k_\theta) \\ &\quad \text{for } \Lambda_\theta/4 + \Lambda_\theta^{(2)} \leq \lambda^{(\theta)} \leq 3\Lambda_\theta/4 + \Lambda_\theta^{(2)}, \\ &= -E(\psi_\theta, k_\theta) + 4E(k_\theta) + E(\psi_\theta(0), k_\theta) \\ &\quad \text{for } 3\Lambda_\theta/4 + \Lambda_\theta^{(2)} \leq \lambda^{(\theta)} \leq \Lambda_\theta, \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \Pi_\theta(\psi_\theta, c, k_\theta) &= -\Pi(\psi_\theta, c, k_\theta) + \Pi(\psi_\theta(0), c, k_\theta) \\ &\quad \text{for } 0 \leq \lambda^{(\theta)} \leq \Lambda_\theta/4 + \Lambda_\theta^{(2)}, \\ &= \Pi(\psi_\theta, c, k_\theta) + 2\Pi(c, k_\theta) + \Pi(\psi_\theta(0), c, k_\theta) \\ &\quad \text{for } \Lambda_\theta/4 + \Lambda_\theta^{(2)} \leq \lambda^{(\theta)} \leq 3\Lambda_\theta/4 + \Lambda_\theta^{(2)}, \\ &= -\Pi(\psi_\theta, c, k_\theta) + 4\Pi(c, k_\theta) + \Pi(\psi_\theta(0), c, k_\theta) \\ &\quad \text{for } 3\Lambda_\theta/4 + \Lambda_\theta^{(2)} \leq \lambda^{(\theta)} \leq \Lambda_\theta. \end{aligned}$$

### 1.3 结果示例

本节结果均使用 Black hole perturbation toolkit 中的 Mathematica 程序包 KerrGeodesics.m 生成 [120]。

代码共有四个需要输入的参数 ( $a, p, e, x = \cos \iota$ ), 其中  $a$  为 Kerr 角动量参数, 剩下三个为轨道参数, 只要给定它们之后, 轨道的全部信息都可以得到。由前面1.2.1节的内容, 我们可以得到三个守恒量 ( $\mathcal{E}, \mathcal{L}_z, \mathcal{Q}$ ); 由1.2.2节的内容, 我们可以得到四个 Mino 频率 ( $\Upsilon_r, \Upsilon_\theta, \Upsilon_\varphi, \Gamma$ ); 最后, 由1.2.3节的内容, 我们可以得到 Boyer-Lindquist 坐标 ( $t, r, \theta, \varphi$ ) 作为 Mino 时  $\lambda$  的函数, 即粒子的轨迹。表3.1与图3.1展示了下面这些代码在四种轨迹设定下的结果。

---

```

1 orbit=KerrGeoOrbit[a,p,e,x]
2 orbit["ConstantsOfMotion"]
    
```

- 3 orbit["Frequencies"]
- 4 orbit["Trajectory"]

编号	trajectory 1	trajectory 2	trajectory 3	trajectory 4
轨迹类型	圆轨道	纯椭圆	纯倾斜	椭圆倾斜
$(a, p, e, x)$	(0.9, 6, 0, 1)	(0.9, 6, 0.5, 1)	(0.9, 6, 0, 0.5)	(0.9, 6, 0.5, 0.5)
$(\mathcal{E}, \mathcal{L}_z, \mathcal{Q})$	(0.9226, 2.7943, 0)	(0.9409, 2.8381, 0)	(0.9293, 1.5186, 7.0017)	(0.9449, 1.5547, 7.3162)
$(\Upsilon_r, \Upsilon_\theta, \Upsilon_\varphi, \Gamma)$	(2.018, 2.816, 3.105, 48.42)	(2.036, 2.855, 3.168, 67.14)	(1.702, 3.049, 3.395, 49.62)	(1.714, 3.118, 3.574, 66.00)

表 3.1 四种特征情形下有质量粒子在 Kerr 时空中的轨迹性质，图像于图3.1展示。

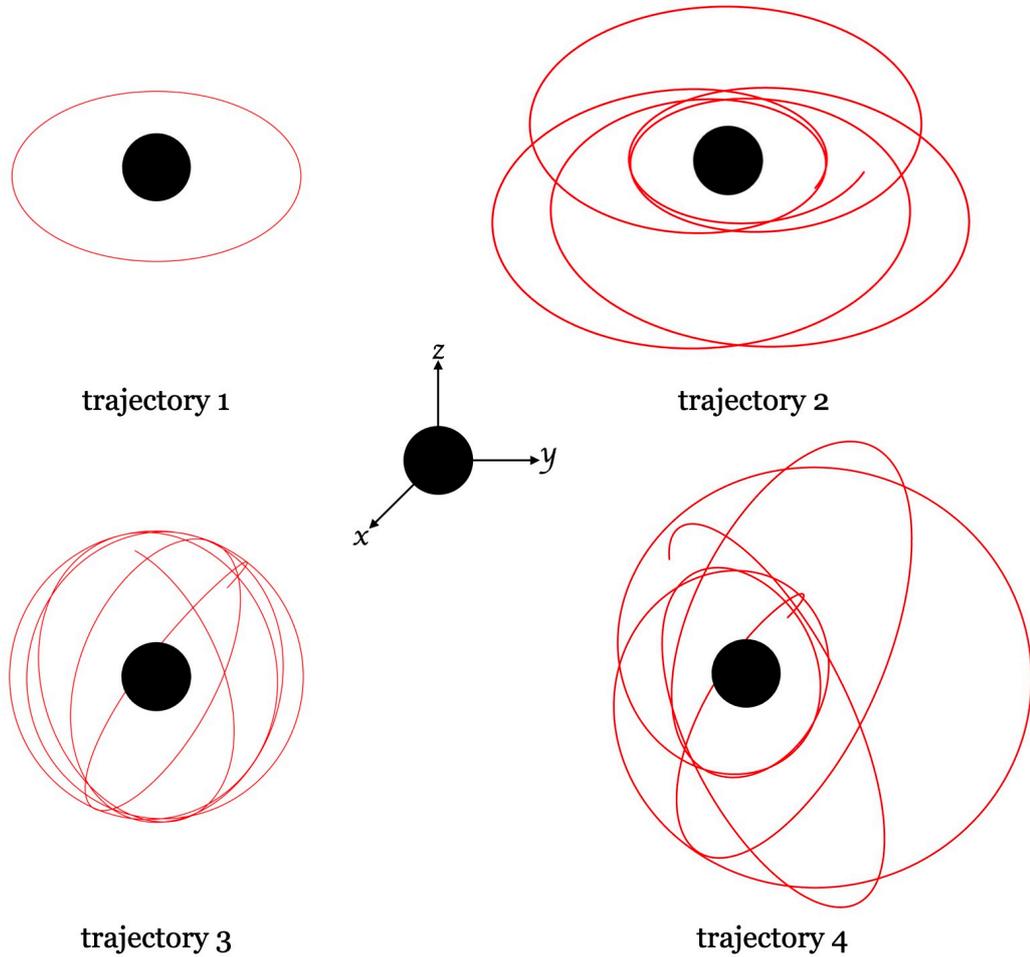


图 3.1 表3.1中四种情况的粒子轨迹图像，其中黑洞的半径为  $r_+ = 1 + \sqrt{1 - 0.9^2} \approx 1.436$ 。

最后作为本节的总结，图3.2展示了 Drasco & Hughes 2006 [21] 中的第一幅图，这篇文章标志着人们首次得到 Kerr 时空中任意轨道上 EMRI 波形快照（无演化）。从本节长达 17 页篇幅的讨论中，我们可以看出 Kerr 时空测地线方程的解析求解并非易事，但只有用解析的方法

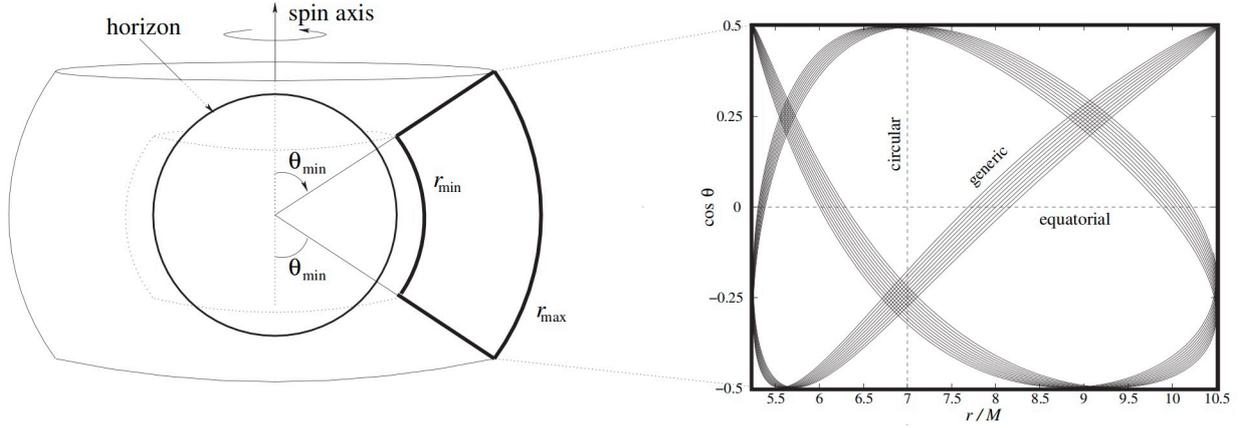


图 3.2 一个任意轨道上的典型 EMRI。如果忽略轨道演化，则小黑洞一直走测地线，无限长时间后其轨迹将填满右框。图片出自 Drasco & Hughes 2006 [21]

将测地线方程中  $t, r, \theta, \varphi$  方向的运动解耦，并将频谱提取出来，我们才能有效地从频域求解非齐次 Teukolsky 方程，因此对 Kerr 时空有质量粒子测地线的理解是不可或缺的。在下一节中，我们将正式进入对 EMRI 波形的计算。

## 2. 无演化的波形计算：非齐次 Teukolsky 方程的 Green 函数法

### 2.1 非齐次 Teukolsky 径向方程的推导

在(2.147)式中，我们明确了该如何分离变量，根据对 SWSH 的讨论， ${}_s S_{lm}^{a\omega}$  满足正交归一关系

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi [{}_s \bar{S}_{lm}^{a\omega}(\theta, \varphi) {}_s S_{l'm'}^{a\omega}(\theta, \varphi)] \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (3.85)$$

引入 Dirac 符号

$$|lm\omega\rangle = \frac{{}_s S_{lm}^{a\omega}(\theta, \varphi)}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} = \frac{{}_s S_{lm}^{a\omega}(\theta)}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t + im\varphi}, \quad (3.86a)$$

$$\langle lm\omega| = \frac{{}_s \bar{S}_{lm}^{a\omega}(\theta, \varphi)}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t} = \frac{{}_s \bar{S}_{lm}^{a\omega}(\theta)}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t - im\varphi} = \frac{{}_s S_{lm}^{a\omega}(\theta)}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t - im\varphi}. \quad (3.86b)$$

最后一个等号是因为 SWSH 满足的方程(2.148)是一个实方程，因此  ${}_s \bar{S}_{lm}^{a\omega}(\theta) = {}_s S_{lm}^{a\omega}(\theta)$ 。于是正交归一关系可以表示为

$$\langle lm\omega | l'm'\omega' \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d\Omega \frac{{}_s S_{lm}^{a\omega}(\theta) {}_s S_{l'm'}^{a\omega'}(\theta)}{2\pi} e^{-i(\omega-\omega')t} e^{i(m-m')\varphi} = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega'). \quad (3.87)$$

于是(2.147)分离变量的完整形式为

$$\begin{aligned}
 {}_s\psi &= \sum_{l=|s|}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \langle lm\omega | {}_s\psi | lm\omega \rangle \\
 &\equiv \sum_{l=|s|}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \langle {}_sR_{lm\omega} | lm\omega \rangle \\
 &= \sum_{l=|s|}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t + im\varphi} {}_sR_{lm\omega}(r) \frac{{}_sS_{lm}^{a\omega}(\theta)}{\sqrt{2\pi}}.
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

同样地，将源项  ${}_s\mathcal{T} = 4\pi\Sigma_s T$  也表示成分离变量的形式

$$\begin{aligned}
 {}_s\mathcal{T} &= \sum_{l=|s|}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \langle lm\omega | {}_s\mathcal{T} | lm\omega \rangle \\
 &\equiv \sum_{l=|s|}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \langle {}_s\mathcal{T}_{lm\omega} | lm\omega \rangle \\
 &= \sum_{l=|s|}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t + im\varphi} {}_s\mathcal{T}_{lm\omega}(r) \frac{{}_sS_{lm}^{a\omega}(\theta)}{\sqrt{2\pi}}.
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

这相当于将一个关于时空坐标  $(t, r, \theta, \varphi)$  的函数转换为  $(\omega, r, l, m)$  的函数。于是我们可以自然地得到齐次方程(2.149)的非齐次形式

$$\left[ \frac{1}{\Delta^s} \frac{d}{dr} \left( \Delta^{s+1} \frac{d}{dr} \right) - {}_sV(r) \right] {}_sR_{lm\omega}(r) = {}_s\mathcal{T}_{lm\omega}(r), \tag{3.90}$$

其中

$${}_sV(r) = -\frac{K^2 - 2is(r-M)K}{\Delta} - 4is\omega r + {}_s\lambda_{lm\omega}. \tag{3.91}$$

## 2.2 Green 函数法

对于一个二阶非齐次方程，我们一般使用格林函数法（Green's Function）求解。其原理十分简单：对于定义在区间  $a \leq x \leq b$  上的一维 ODE

$$\mathcal{L}y(x) \equiv \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x). \tag{3.92}$$

在区间端点  $x = a$  和  $x = b$  满足齐次边界条件，这样的 ODE 我们可以将其 Green 函数定义为

$$\mathcal{L}G(x, x') = \delta(x - x'). \tag{3.93}$$

因此(3.92)的解可以写成

$$y(x) = \int_a^b G(x, x') f(x') dx'. \tag{3.94}$$

证明如下：

$$\mathcal{L}y(x) = \mathcal{L} \int_a^b G(x, x') f(x') dt = \int_a^b \mathcal{L}G(x, x') f(x') dx' = \int_a^b \delta(x - x') f(x') dx' = f(x). \quad (3.95)$$

这里需要强调的一点是，第二个等号  $\mathcal{L}f \rightarrow f\mathcal{L}$  的交换要求  $\int_a^b G(x, x') f(x') dx'$  是收敛的，特别是当我们选取  $a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty$  时，被积函数的收敛性需要被细致考虑。我们这里暂且认为它们是收敛的，从而可以顺畅地进行后续的推导，但这里的强调是为了给读者留下印象，因为我们将在第六章第1节重新回到这个问题。

对(3.93)在  $t$  附近的一个小区间  $[x' - \varepsilon, x' + \varepsilon], \varepsilon \rightarrow 0$  积分，得到

$$\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dG(x, x')}{dx} \right] dx + \int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} q(x) G(x, x') dx = \int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} \delta(x' - x) dx, \quad (3.96)$$

积分得

$$p(x) \frac{dG(x, x')}{dx} \Big|_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} + \int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} q(x) G(x, x') dx = 1. \quad (3.97)$$

如果  $G(x, x')$  和  $dG(x, x')/dx$  在  $t$  处都是连续的，则上式左边为 0，因此这个假设不成立。我们可以假设  $G(x, x')$  在  $t$  处是连续的，但  $dG(x, x')/dx$  在  $t$  处不连续。于是(3.97)式变为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \frac{dG(x, x')}{dx} \Big|_{x=x'+\varepsilon} - \frac{dG(x, x')}{dx} \Big|_{x=x'-\varepsilon} \right] = \frac{1}{p(x')}. \quad (3.98)$$

为了更好地研究 Green 函数的性质，我们将  $G(x, x')$  用算符  $\mathcal{L}$  的本征函数展开，算符  $\mathcal{L}$  的本征函数以及它们的正交归一条件定义如下：

$$\mathcal{L}\varphi_n(x) = \lambda_n \varphi_n(x), \quad \langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{nm}, \quad \delta(x - x') = \sum_m \varphi_m(x) \bar{\varphi}_m(x'). \quad (3.99)$$

因此我们可以将 Green 函数  $G(x; x')$  展开为

$$G(x; x') = \sum_{nm} g_{nm} \varphi_n(x) \bar{\varphi}_m(x'). \quad (3.100)$$

于是(3.93)式可以写为

$$\mathcal{L} \sum_{nm} g_{nm} \varphi_n(x) \bar{\varphi}_m(x') = \sum_m \varphi_m(x) \bar{\varphi}_m(x'). \quad (3.101)$$

将  $\mathcal{L}$  作用于  $\varphi_n(x)$  得到

$$\sum_{nm} \lambda_n g_{nm} \varphi_n(x) \bar{\varphi}_m(x') = \sum_m \varphi_m(x) \bar{\varphi}_m(x'). \quad (3.102)$$

通过正交归一关系消去  $\bar{\varphi}_m(x')$  得

$$g_{nm} \lambda_n = \delta_{nm}. \quad (3.103)$$

所以 Green 函数也可以写成

$$G(x; x') = \sum_n \frac{\bar{\varphi}_n(x') \varphi_n(x)}{\lambda_n}, \quad \lambda_n \neq 0. \quad (3.104)$$

从中, 我们还可以得到

$$G(x; x') = \bar{G}(x'; x). \quad (3.105)$$

下面我们来具体求解 Green 函数, 对于

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y(x) &= f(x), \quad a < x < b \\ y(a) &= A, \quad y(b) = B. \end{aligned} \quad (3.106)$$

与之对应的 Green 函数为  $G(x; x')$ , 它满足的边值问题为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dG(x; x')}{dx} \right] + q(x)G(x; x') &= \delta(x - x'), \quad a < x, x' < b, \\ G(a; x') &= 0, \quad G(b; x') = 0. \end{aligned} \quad (3.107)$$

当  $x \neq x'$  时, 我们可以将 Green 函数表示为

$$G(x; x') = \begin{cases} c_1(x')y_1(x) + c_2(x')y_2(x), & a < x < x' \\ c_3(x')y_1(x) + c_4(x')y_2(x), & x' < x < b \end{cases}, \quad (3.108)$$

其中  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  是方程(3.106)的两组基。而  $c_1(x')$ ,  $c_2(x')$ ,  $c_3(x')$ ,  $c_4(x')$  是我们要求解的系数。我们有 4 个限制条件来确定这 4 个系数, 它们是  $a, b$  处的边界条件,  $x'$  处的连续性条件以及(3.98)式:

$$G(a; x') = c_1(x')y_1(a) + c_2(x')y_2(a) = 0, \quad (3.109a)$$

$$G(b; x') = c_3(x')y_1(b) + c_4(x')y_2(b) = 0, \quad (3.109b)$$

$$c_1(x')y_1(x') + c_2(x')y_2(x') = c_3(x')y_1(x') + c_4(x')y_2(x'), \quad (3.109c)$$

$$c_3(x')y_1'(x') + c_4(x')y_2'(x') - c_1(x')y_1'(x') - c_2(x')y_2'(x') = 1/p(x'). \quad (3.109d)$$

解得

$$c_1(x') = \frac{y_2(a) [y_1(x')y_2(b) - y_2(x')y_1(b)]}{p(x') [y_1(b)y_2(a) - y_1(a)y_2(b)] [y_1'(x')y_2(x') - y_1(x')y_2'(x)]}, \quad (3.110a)$$

$$c_2(x') = \frac{y_1(a) [y_1(b)y_2(x') - y_2(b)y_1(x')]}{p(x') [y_1(b)y_2(a) - y_1(a)y_2(b)] [y_1'(x')y_2(x') - y_1(x')y_2'(x)]}, \quad (3.110b)$$

$$c_3(x') = \frac{y_2(b) [y_1(x')y_2(a) - y_2(x')y_1(a)]}{p(x') [y_1(b)y_2(a) - y_1(a)y_2(b)] [y_1'(x')y_2(x') - y_1(x')y_2'(x)]}, \quad (3.110c)$$

$$c_4(x') = \frac{y_1(b) [y_1(a)y_2(x') - y_2(a)y_1(x')]}{p(x') [y_1(b)y_2(a) - y_1(a)y_2(b)] [y_1'(x')y_2(x') - y_1'(x')y_1(x')]} \quad (3.110d)$$

前提是分母不为零

$$y_1(a)y_2(x') - y_2(a)y_1(x') \neq 0, \quad y_1'(x')y_2(x') - y_1'(x')y_1(x') \neq 0. \quad (3.111)$$

实际上，我们的要计算的 Teukolsky 方程中，Green 函数的形式要简单很多，因为物理上，在视界处只有入射波，在无穷远处只有出射波。所以 Green 函数化简为

$$\begin{aligned} G(r; r') &= Ay_1(r)y_2(r') \quad r_+ < r < r', \\ G(r; r') &= Ay_2(r)y_1(r') \quad r' < r < \infty, \end{aligned} \quad (3.112)$$

其中

$$\begin{aligned} p(r) &= \Delta^{s+1}, \quad q(r) = -{}_sV_{lm\omega}(r)\Delta^s, \quad f(r) = {}_s\mathcal{T}_{lm\omega}(r)\Delta^s, \\ a &\rightarrow r_+, \quad b \rightarrow \infty, \quad y_1(r) = {}_sR_{lm\omega}^{\text{in}}(r), \quad y_2(r) = {}_sR_{lm\omega}^{\text{up}}(r). \end{aligned} \quad (3.113)$$

运用(3.98)式，我们得到

$${}_sA_{lm\omega} \left[ \frac{d{}_sR_{lm\omega}^{\text{up}}(r')}{dr'} {}_sR_{lm\omega}^{\text{in}}(r') - \frac{d{}_sR_{lm\omega}^{\text{in}}(r')}{dr'} {}_sR_{lm\omega}^{\text{up}}(r') \right] = \Delta^{-s-1}(r'). \quad (3.114)$$

我们定义 invariant Wronskian

$${}_sW_{lm\omega} = \frac{1}{{}_sA_{lm\omega}} = \left[ \frac{d{}_sR_{lm\omega}^{\text{up}}(r)}{dr} {}_sR_{lm\omega}^{\text{in}}(r) - \frac{d{}_sR_{lm\omega}^{\text{in}}(r)}{dr} {}_sR_{lm\omega}^{\text{up}}(r) \right] \Delta^{s+1}. \quad (3.115)$$

虽然等式右边是  $r$  的函数，但这个表达式实际上与  $r$  无关，证明如下：

考虑

$$\mathcal{L}y(x) \equiv p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x). \quad (3.116)$$

$y_1(x)$  和  $y_2(x)$  是  $\mathcal{L}y(x) = 0$  的两个线性无关解，则

$$\begin{aligned} p(x)y_1''(x) + p'(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) &= 0, \\ p(x)y_2''(x) + p'(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x) &= 0. \end{aligned} \quad (3.117)$$

将(3.117)第一式乘  $y_2(x)$  减去第二式乘  $y_1(x)$  并积分得到

$$\int_{x_0}^x y_2(x)p(x)y_1''(x) + y_2(x)p'(x)y_1'(x) - y_1(x)p(x)y_2''(x) - y_1(x)p'(x)y_2'(x)dx = 0. \quad (3.118)$$

对上式使用分部积分，则大多数项相抵消，最终留下

$$[y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x)]p(x) \Big|_{x_0}^x = 0. \quad (3.119)$$

(3.119)式就是我们已经得到的(3.115)式，即  ${}_sW_{lm\omega}$  是一个常数，所以我们只需要计算它在无穷远处  $r \rightarrow \infty$  的值即可。由(2.195)可知

$$\begin{aligned}
 \frac{d{}_sR_{lm\omega}^{\text{in}}(r \rightarrow \infty)}{dr} &= - (1 + 2s) {}_sR_{lm\omega}^{\text{in,ref}} r^{-2-2s} e^{i\omega r_*} + i\omega \frac{r^2 + a^2}{\Delta} {}_sR_{lm\omega}^{\text{in,ref}} r^{-1-2s} e^{i\omega r_*} \\
 &\quad - \frac{{}_sR_{lm\omega}^{\text{in,inc}}}{r^2} e^{-i\omega r_*} - i\omega \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \frac{{}_sR_{lm\omega}^{\text{in,inc}}}{r} e^{-i\omega r_*} \\
 &= - (1 + 2s) {}_sR_{lm\omega}^{\text{in,ref}} r^{-2-2s} e^{i\omega r_*} + i\omega {}_sR_{lm\omega}^{\text{in,ref}} r^{-1-2s} e^{i\omega r_*} \\
 &\quad - \frac{{}_sR_{lm\omega}^{\text{in,inc}}}{r^2} e^{-i\omega r_*} - i\omega \frac{{}_sR_{lm\omega}^{\text{in,inc}}}{r} e^{-i\omega r_*}, \\
 \frac{d{}_sR_{lm\omega}^{\text{up}}(r \rightarrow \infty)}{dr} &= - (1 + 2s) {}_sR_{lm\omega}^{\text{up,trans}} r^{-2-2s} e^{i\omega r_*} + i\omega \frac{r^2 + a^2}{\Delta} {}_sR_{lm\omega}^{\text{up,trans}} r^{-1-2s} e^{i\omega r_*} \\
 &= - (1 + 2s) {}_sR_{lm\omega}^{\text{up,trans}} r^{-2-2s} e^{i\omega r_*} + i\omega {}_sR_{lm\omega}^{\text{up,trans}} r^{-1-2s} e^{i\omega r_*}.
 \end{aligned} \tag{3.120}$$

因此 invariant Wronskian 即为

$$\begin{aligned}
 {}_sW_{lm\omega} &= \left[ \left( \frac{{}_sR_{lm\omega}^{\text{in,ref}}}{r^{1+2s}} e^{i\omega r_*} + \frac{{}_sR_{lm\omega}^{\text{in,inc}}}{r} e^{-i\omega r_*} \right) \left( - (1 + 2s) \frac{{}_sR_{lm\omega}^{\text{up,trans}}}{r^{2+2s}} e^{i\omega r_*} + i\omega \frac{{}_sR_{lm\omega}^{\text{up,trans}}}{r^{1+2s}} e^{i\omega r_*} \right) \right. \\
 &\quad - \frac{{}_sR_{lm\omega}^{\text{up,trans}}}{r^{1+2s}} e^{i\omega r_*} \left( - (1 + 2s) \frac{{}_sR_{lm\omega}^{\text{in,ref}}}{r^{2+2s}} e^{i\omega r_*} + i\omega \frac{{}_sR_{lm\omega}^{\text{in,ref}}}{r^{1+2s}} e^{i\omega r_*} \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{{}_sR_{lm\omega}^{\text{in,inc}}}{r^2} e^{-i\omega r_*} - i\omega \frac{{}_sR_{lm\omega}^{\text{in,inc}}}{r} e^{-i\omega r_*} \right) \right] r^{2s+2} \\
 &= -2s \frac{{}_sR_{lm\omega}^{\text{up,trans}}}{r} {}_sR_{lm\omega}^{\text{in,inc}} + 2i\omega {}_sR_{lm\omega}^{\text{up,trans}} {}_sR_{lm\omega}^{\text{in,inc}} \\
 &= 2i\omega {}_sR_{lm\omega}^{\text{up,trans}} {}_sR_{lm\omega}^{\text{in,inc}}.
 \end{aligned} \tag{3.121}$$

可见  ${}_sW_{lm\omega}$  的值确实与  $r$  无关。因此最终，Teukolsky 方程的非齐次解可以表示成

$$\begin{aligned}
 {}_sR_{lm\omega}(r) &= \int_{r_+}^{\infty} G(r; r') {}_s\mathcal{T}_{lm\omega}(r') \Delta^s(r') dr' \\
 &= {}_sZ_{lm\omega}^{\text{in}}(r) {}_sR_{lm\omega}^{\text{up}}(r) + {}_sZ_{lm\omega}^{\text{up}}(r) {}_sR_{lm\omega}^{\text{in}}(r),
 \end{aligned} \tag{3.122}$$

其中

$${}_sZ_{lm\omega}^{\text{in}}(r) \equiv \frac{1}{{}_sW_{lm\omega}} \int_{r_+}^r {}_sR_{lm\omega}^{\text{in}}(r') {}_s\mathcal{T}_{lm\omega}(r') \Delta^s(r') dr', \tag{3.123a}$$

$${}_sZ_{lm\omega}^{\text{up}}(r) \equiv \frac{1}{{}_sW_{lm\omega}} \int_r^{\infty} {}_sR_{lm\omega}^{\text{up}}(r') {}_s\mathcal{T}_{lm\omega}(r') \Delta^s(r') dr'. \tag{3.123b}$$

在上述推导中，我们没有限定自旋  $s$  的具体值。但根据(2.195)式下方的讨论，EMRI 波形的计算需要的是  $s = -2$  的情形，因此在后文中，我们将省略下标，简化记号为  $R_{lm\omega} \equiv {}_{-2}R_{lm\omega}$ ， $\mathcal{T}_{lm\omega} \equiv {}_{-2}\mathcal{T}_{lm\omega}$ ， $Z_{lm\omega} \equiv {}_{-2}Z_{lm\omega}$ 。

## 2.3 Teukolsky 方程源函数 $\mathcal{T}_{lm\omega}$ 的构造

### 2.3.1 基础准备

由(3.89)式的分解可知, 利用(3.86)定义的 Dirac 符号和(3.87)的正交归一关系, 其逆变换可以表示成

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{lm\omega}(r) &= \langle lm\omega | \mathcal{T}(t, r, \theta, \varphi) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d\Omega \mathcal{T}(t, r, \theta, \varphi)_{-2} \frac{S_{lm}^{a\omega}(\theta)}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t - im\varphi}.\end{aligned}\quad (3.124)$$

注意这里我们将对  $t$  积分的上下限设为  $\pm\infty$ , 但实际上 EMRI 的演化时标是一个有限值。这里设为无穷实际上是基于一个假设——小黑洞轨道恒为测地线, 不随引力辐射而演化。这也印证了本节的标题: 无演化的波形计算。在下一节中, 我们将允许轨道的演化, 但由于 EMRI 的演化时标远长于其轨道周期, 因此这样的无穷设定仍然有效, 我们采用双时标展开的方式加入轨道演化 [93]。但对于一些快速演化的轨道, 如 plunge 轨道, 这样的假设将失效, 在第六章第1节中, 我们将详细讨论这类情形下辐射的引力波。

回顾一下表2.2, 对于  $s = -2$  的情形  $\mathcal{T}(t, r, \theta, \varphi) \equiv 4\pi\Sigma(2\rho^{-4}T_4) = 8\pi\rho^{-5}\bar{\rho}^{-1}T_4$ , 其中  $T_4$  定义在(2.142)式。带入算符作为方向导数的定义(2.76)和 Ricci 旋转系数(2.144), 我们可以将  $T_4$  表示为

$$\begin{aligned}T_4 &= -\frac{1}{2}\rho^8\bar{\rho}\mathcal{L}_{-1}\left[\rho^{-4}\mathcal{L}_0\left(\rho^{-2}\bar{\rho}^{-1}T_{mn}\right)\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\rho^8\bar{\rho}\Delta^2\mathcal{L}_{-1}\left[\rho^{-4}\bar{\rho}^2\mathcal{D}^\dagger\left(\rho^{-2}\bar{\rho}^{-2}\Delta^{-1}T_{\bar{m}n}\right)\right] \\ &\quad - \frac{1}{4}\rho^8\bar{\rho}\Delta^2\mathcal{D}^\dagger\left[\rho^{-4}\mathcal{D}^\dagger\left(\rho^{-2}\bar{\rho}T_{\bar{m}\bar{m}}\right)\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\rho^8\bar{\rho}\Delta^2\mathcal{D}^\dagger\left[\rho^{-4}\bar{\rho}^2\Delta^{-1}\mathcal{L}_{-1}\left(\rho^{-2}\bar{\rho}^{-2}T_{\bar{m}n}\right)\right],\end{aligned}\quad (3.125)$$

其中的微分算符定义为

$$\mathcal{L}_n = \partial_\theta + \frac{m}{\sin\theta} - a\omega\sin\theta + n\cot\theta, \quad (3.126a)$$

$$\mathcal{L}_n^\dagger = \mathcal{L}_n(-\omega, -m) = \partial_\theta - \frac{m}{\sin\theta} + a\omega\sin\theta + n\cot\theta, \quad (3.126b)$$

$$\mathcal{D} = \partial_r - i\frac{K}{\Delta}, \quad (3.126c)$$

$$\mathcal{D}^\dagger = \mathcal{D}(-\omega, -m) = \partial_r + i\frac{K}{\Delta} \quad (3.126d)$$

在此提醒读者  $K = \omega(r^2 + a^2) - am$ ,  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ , 注意区分  $\Delta$  与(2.76)式定义的方向导数算符  $\Delta = n^\mu\partial_\mu$ 。细心的读者或许已经发现, 这里定义的  $\mathcal{L}_n$  算符实际上就是我们推导 SWSH 时定义的升算符  $\delta$  (见(2.159)式) 加上对时间  $t$  的依赖。(3.125)式的推导还用到了如下恒等式, 它们在后续的推导中还要被多次使用

$$[\mathcal{L}_i + ia\sin\theta(n\bar{\rho} - m\rho)]f(\theta) = \bar{\rho}^n\rho^m\mathcal{L}_i\left[\bar{\rho}^{-n}\rho^{-m}f(\theta)\right], \quad (3.127a)$$

$$\Delta^{-j} \rho^{-m} \bar{\rho}^{-n} \mathcal{D}^\dagger \left[ \Delta^j \rho^m \bar{\rho}^n f(r) \right] = \left[ \mathcal{D}^\dagger + m\rho + n\bar{\rho} + \frac{2j(r-M)}{\Delta} \right] f(r), \quad (3.127b)$$

$$\mathcal{L}_n \left[ \frac{f(\theta)}{\sin \theta} \right] = \frac{\mathcal{L}_{n-1}[f(\theta)]}{\sin \theta}. \quad (3.127c)$$

还有一个非常有用的恒等式会被用到：

$$\int_0^\pi h(\theta) \mathcal{L}_n[g(\theta)] \sin \theta d\theta = - \int_0^\pi g(\theta) \mathcal{L}_{1-n}^\dagger[h(\theta)] \sin \theta d\theta, \quad (3.128)$$

证明如下：

$$\begin{aligned} \int_0^\pi h(\theta) \mathcal{L}_n[g(\theta)] \sin \theta d\theta &= \int_0^\pi h(\theta) (\partial_\theta + m \csc \theta - a\omega \sin \theta + n \cot \theta) g(\theta) \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^\pi h(\theta) [g(\theta)(m \csc \theta - a\omega \sin \theta + n \cot \theta) + \partial_\theta g(\theta)] \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^\pi \left\{ h(\theta)g(\theta)(m \csc \theta - a\omega \sin \theta + n \cot \theta) \sin \theta \right. \\ &\quad \left. - g(\theta) [\partial_\theta h(\theta) \sin \theta + h(\theta) \cos \theta] \right\} d\theta + g(\theta)h(\theta) \sin \theta \Big|_0^\pi \quad (3.129) \\ &= \int_0^\pi g(\theta) [-\partial_\theta + m \csc \theta - a\omega \sin \theta + (n-1) \cot \theta] h(\theta) \sin \theta d\theta \\ &= - \int_0^\pi g(\theta) [\partial_\theta - m \csc \theta + a\omega \sin \theta + (1-n) \cot \theta] h(\theta) \sin \theta d\theta \\ &= - \int g(\theta) \mathcal{L}_{1-n}^\dagger[h(\theta)] \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

### 2.3.2 点粒子的能动量张量

设无自旋的点粒子（这里指小黑洞，并假设其为 Schwarzschild 黑洞）的质量为  $\mu$ ，则它的能动量张量（energy-momentum tensor）可以表示为

$$T^{\mu\nu}(z^\alpha) = \mu \int d\tau u^\mu u^\nu \delta^{(4)}[z^\alpha - x^\alpha(\tau)], \quad (3.130)$$

其中  $z^\alpha = t, r, \theta, \varphi$  为时空中的场点， $x^\alpha(\tau) = \tilde{t}(\tau), \tilde{r}(\tau), \tilde{\theta}(\tau), \tilde{\varphi}(\tau)$  为点粒子的轨迹。这里的四维 Dirac 方程定义为

$$\delta^{(4)}[z^\alpha - x^\alpha(\tau)] \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta[t - \tilde{t}(\tau)] \delta[r - \tilde{r}(\tau)] \delta[\theta - \tilde{\theta}(\tau)] \delta[\varphi - \tilde{\varphi}(\tau)], \quad (3.131)$$

对于 Kerr 时空  $\sqrt{-g} = \Sigma \sin \theta$ 。由于固有时  $\tau$  与坐标时  $\tilde{t}$  之间总是一一对应的，因此我们可以将(3.130)积分为

$$T^{\mu\nu}(t, r, \theta, \varphi) = \frac{\mu u^\mu u^\nu}{\Sigma \sin \theta u^t} \delta[r - \tilde{r}(t)] \delta[\theta - \tilde{\theta}(t)] \delta[\varphi - \tilde{\varphi}(t)]. \quad (3.132)$$

在(3.125)中，我们需要用到  $T^{\mu\nu}$  在 NP 标架下的投影

$$T_{nn} = T^{\mu\nu} n_\mu n_\nu, \quad T_{\bar{m}n} = T^{\mu\nu} \bar{m}_\mu n_\nu, \quad T_{\bar{m}\bar{m}} = T^{\mu\nu} \bar{m}_\mu \bar{m}_\nu, \quad (3.133)$$

其中  $l_\mu$ ,  $n_\mu$ ,  $m_\mu$  为 Kinnersley 标架(2.130)的协变形式, 用 Kerr 度规  $g_{\mu\nu}$  降低指标得

$$\begin{aligned} l_\mu &= \left[ 1, -\frac{\Sigma}{\Delta}, 0, -a \sin^2 \theta \right], \\ n_\mu &= \frac{1}{2\Sigma} \left[ \Delta, \Sigma, 0, -a\Delta \sin^2 \theta \right], \\ m_\mu &= -\frac{\bar{\rho}}{\sqrt{2}} \left[ ia \sin \theta, 0, -\Sigma, -i(r^2 + a^2) \sin \theta \right]. \end{aligned} \quad (3.134)$$

运用测地线方程(3.10), 我们可以将投影后的能动量张量表示成

$$T_{ab} = \frac{\mu}{\sin \theta} C_{ab} \delta[r - \tilde{r}(t)] \delta[\theta - \tilde{\theta}(t)] \delta[\varphi - \tilde{\varphi}(t)], \quad (3.135)$$

其中

$$C_{nn} = \frac{1}{4\Sigma^3 u t} \left[ \mathcal{E} (r^2 + a^2) - a\mathcal{L}_z + \Sigma \frac{dr}{d\tau} \right]^2, \quad (3.136a)$$

$$C_{\bar{m}n} = \frac{\rho}{2\sqrt{2}\Sigma^2 u t} \left[ \mathcal{E} (r^2 + a^2) - a\mathcal{L}_z + \Sigma \frac{dr}{d\tau} \right] \left[ i \sin \theta \left( a\mathcal{E} - \frac{\mathcal{L}_z}{\sin^2 \theta} \right) + \Sigma \frac{d\theta}{d\tau} \right], \quad (3.136b)$$

$$C_{\bar{m}\bar{m}} = \frac{\rho^2}{2\Sigma u t} \left[ i \sin \theta \left( a\mathcal{E} - \frac{\mathcal{L}_z}{\sin^2 \theta} \right) + \Sigma \frac{d\theta}{d\tau} \right]^2. \quad (3.136c)$$

### 2.3.3 $\mathcal{T}_{lm\omega}$ 的最终形式

将(3.125), (3.135), 带入(3.124)式并直接积分将  $\varphi$  转换为  $\tilde{\varphi}(t)$  得

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{lm\omega}(r) &= \sqrt{2\pi}\mu \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^\pi d\theta \sin \theta {}_{-2}S_{lm}^{a\omega}(\theta) e^{i\omega t} e^{-im\tilde{\varphi}(t)} \\ &\quad \times \left\{ -2\rho^3 \mathcal{L}_{-1} \left[ \rho^{-4} \mathcal{L}_0 \left( \rho^{-2} \bar{\rho}^{-1} \frac{C_{nn}}{\sin \theta} \delta[r - \tilde{r}(t)] \delta[\theta - \tilde{\theta}(t)] \right) \right] \right. \\ &\quad + \sqrt{2}\rho^3 \Delta^2 \mathcal{L}_{-1} \left[ \rho^{-4} \bar{\rho}^2 \mathcal{D}^\dagger \left( \rho^{-2} \bar{\rho}^{-2} \Delta^{-1} \frac{C_{\bar{m}n}}{\sin \theta} \delta[r - \tilde{r}(t)] \delta[\theta - \tilde{\theta}(t)] \right) \right] \\ &\quad + \sqrt{2}\rho^3 \Delta^2 \mathcal{D}^\dagger \left[ \rho^{-4} \bar{\rho}^2 \Delta^{-1} \mathcal{L}_{-1} \left( \rho^{-2} \bar{\rho}^{-2} \frac{C_{\bar{m}n}}{\sin \theta} \delta[r - \tilde{r}(t)] \delta[\theta - \tilde{\theta}(t)] \right) \right] \\ &\quad \left. - \rho^3 \Delta^2 \mathcal{D}^\dagger \left[ \rho^{-4} \mathcal{D}^\dagger \left( \rho^{-2} \bar{\rho} \frac{C_{\bar{m}\bar{m}}}{\sin \theta} \delta[r - \tilde{r}(t)] \delta[\theta - \tilde{\theta}(t)] \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.137)$$

接下来处理  $\theta$  的积分。含有  $C_{nn}$  的项被从内到外被  $\mathcal{L}_0$  和  $\mathcal{L}_{-1}$  包裹, 因此需要用到两次恒等式(3.128), 然后积分消去关于  $\theta$  的 Delta 函数得到

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi d\theta \sin \theta {}_{-2}S_{lm}^{a\omega}(\theta) \left\{ -2\rho^3 \mathcal{L}_{-1} \left[ \rho^{-4} \mathcal{L}_0 \left( \rho^{-2} \bar{\rho}^{-1} \frac{C_{nn}}{\sin \theta} \delta[r - \tilde{r}(t)] \delta[\theta - \tilde{\theta}(t)] \right) \right] \right\} \\ &= -2\mathcal{L}_1^\dagger \left[ \rho^{-4} \mathcal{L}_2^\dagger (S\rho^3) \right] \frac{C_{nn}}{\rho^2 \bar{\rho}} \delta[r - \tilde{r}(t)], \end{aligned} \quad (3.138)$$

其中  $S \equiv {}_{-2}S_{lm}^{a\omega}[\tilde{\theta}(t)]$ 。含有  $C_{\bar{m}n}$  的第一项从内到外含有  $C_{\bar{m}\bar{m}}$  的项无需处理，可以直接积分得到

$$\int_0^\pi d\theta \sin\theta {}_{-2}S_{lm}^{a\omega}(\theta) \left\{ -\rho^3 \Delta^2 \mathcal{D}^\dagger \left[ \rho^{-4} \mathcal{D}^\dagger \left( \rho^{-2} \bar{\rho} \frac{C_{\bar{m}\bar{m}}}{\sin\theta} \delta[r - \tilde{r}(t)] \delta[\theta - \tilde{\theta}(t)] \right) \right] \right\} \quad (3.139)$$

$$= -\rho^3 \Delta^2 S \mathcal{D}^\dagger \left[ \rho^{-4} \mathcal{D}^\dagger \left( \rho^{-2} \bar{\rho} C_{\bar{m}\bar{m}} \delta[r - \tilde{r}(t)] \right) \right].$$

中间含有  $C_{\bar{m}n}$  的两项，其中第一项  $\mathcal{L}_{-1}$  在外侧，可以直接使用恒等式(3.128)，但第二项  $\mathcal{L}_{-1}$  在内侧，需要做一些处理调换  $\mathcal{D}^\dagger$  与  $\mathcal{L}_{-1}$  的顺序，即

$$\mathcal{D}^\dagger \left[ \rho^{-4} \bar{\rho}^2 \Delta^{-1} \mathcal{L}_{-1} \left( \rho^{-2} \bar{\rho}^{-2} \frac{C_{\bar{m}n}}{\sin\theta} \delta[r - \tilde{r}(t)] \delta[\theta - \tilde{\theta}(t)] \right) \right]$$

$$= \rho^{-4} \bar{\rho}^2 \mathcal{L}_{-1} \left[ \mathcal{D}^\dagger \left( \rho^{-2} \bar{\rho}^{-2} \Delta^{-1} \frac{C_{\bar{m}n}}{\sin\theta} \delta[r - \tilde{r}(t)] \delta[\theta - \tilde{\theta}(t)] \right) \right] \quad (3.140)$$

$$+ \left( \rho^{-4} \bar{\rho}^2 \right)_{,r} \mathcal{L}_{-1} \left( \rho^{-2} \bar{\rho}^{-2} \Delta^{-1} \frac{C_{\bar{m}n}}{\sin\theta} \delta[r - \tilde{r}(t)] \delta[\theta - \tilde{\theta}(t)] \right).$$

这样我们就可以顺利使用恒等式(3.128)，得到

$$\int_0^\pi d\theta \sin\theta {}_{-2}S_{lm}^{a\omega}(\theta) \left\{ \sqrt{2} \rho^3 \Delta^2 \mathcal{L}_{-1} \left[ \rho^{-4} \bar{\rho}^2 \mathcal{D}^\dagger \left( \rho^{-2} \bar{\rho}^{-2} \Delta^{-1} \frac{C_{\bar{m}n}}{\sin\theta} \delta[r - \tilde{r}(t)] \delta[\theta - \tilde{\theta}(t)] \right) \right] \right.$$

$$\left. + \sqrt{2} \rho^3 \Delta^2 \mathcal{D}^\dagger \left[ \rho^{-4} \bar{\rho}^2 \Delta^{-1} \mathcal{L}_{-1} \left( \rho^{-2} \bar{\rho}^{-2} \frac{C_{\bar{m}n}}{\sin\theta} \delta[r - \tilde{r}(t)] \delta[\theta - \tilde{\theta}(t)] \right) \right] \right\}$$

$$= -\frac{\sqrt{2} \Delta^2 \bar{\rho}^2}{\rho} \left[ \mathcal{L}_2^\dagger(S) + ia(\rho - \bar{\rho}) \sin\theta S \right] \mathcal{D}^\dagger \left[ \frac{C_{\bar{m}n}}{\Delta \rho^2 \bar{\rho}^2} \delta[r - \tilde{r}(t)] \right]$$

$$- \sqrt{2} \mathcal{L}_2^\dagger \left[ \rho^3 S \left( \rho^{-4} \bar{\rho}^2 \right)_{,r} \right] \frac{\Delta}{\rho^2 \bar{\rho}^2} C_{\bar{m}n} \delta[r - \tilde{r}(t)]. \quad (3.141)$$

将(3.138)，(3.139)，(3.141)式组合起来带入(3.137)得

$$\mathcal{T}_{lm\omega}(r) = \sqrt{2\pi} \mu \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} e^{-im\tilde{\varphi}(t)} \times \left\{ -2 \mathcal{L}_1^\dagger \left[ \rho^{-4} \mathcal{L}_2^\dagger (S \rho^3) \right] \frac{C_{\bar{m}n}}{\rho^2 \bar{\rho}} \delta[r - \tilde{r}(t)] \right.$$

$$- \sqrt{2} \mathcal{L}_2^\dagger \left[ \rho^3 S \left( \rho^{-4} \bar{\rho}^2 \right)_{,r} \right] \frac{\Delta}{\rho^2 \bar{\rho}^2} C_{\bar{m}n} \delta[r - \tilde{r}(t)] \quad (3.142)$$

$$- \frac{\sqrt{2} \Delta^2 \bar{\rho}^2}{\rho} \left[ \mathcal{L}_2^\dagger(S) + ia(\rho - \bar{\rho}) \sin\theta S \right] \mathcal{D}^\dagger \left[ \frac{C_{\bar{m}n}}{\Delta \rho^2 \bar{\rho}^2} \delta[r - \tilde{r}(t)] \right]$$

$$\left. - \rho^3 \Delta^2 S \mathcal{D}^\dagger \left[ \rho^{-4} \mathcal{D}^\dagger \left( \rho^{-2} \bar{\rho} C_{\bar{m}\bar{m}} \delta[r - \tilde{r}(t)] \right) \right] \right\}.$$

上式中所有的  $\theta$  都已经化为  $\tilde{\theta}(t)$ ，有算符  $\mathcal{L}_n^\dagger$  作用的项是做用完之后再转换为  $\tilde{\theta}(t)$ 。最后，用恒等式(3.127b)将它们展开得

$$\mathcal{T}_{lm\omega}(r) = \mu \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t - im\tilde{\varphi}(t)} \Delta^2 \left[ (A_{nn0} + A_{\bar{m}n0} + A_{\bar{m}\bar{m}0}) \delta[r - \tilde{r}(t)] \right. \quad (3.143)$$

$$\left. + \{(A_{\bar{m}n1} + A_{\bar{m}\bar{m}1}) \delta[r - \tilde{r}(t)]\}_{,r} + \{A_{\bar{m}\bar{m}2} \delta[r - \tilde{r}(t)]\}_{,rr} \right],$$

其中

$$A_{nm0} = -2 \left( \sqrt{2\pi} \right) \frac{C_{nn} \rho^{-2} \bar{\rho}^{-1}}{\Delta^2} \mathcal{L}_1^\dagger \left[ \rho^{-4} \mathcal{L}_2^\dagger \left( \rho^3 S \right) \right], \quad (3.144a)$$

$$A_{\bar{m}n0} = -2\sqrt{2} \left( \sqrt{2\pi} \right) \frac{C_{\bar{m}n} \rho^{-3}}{\Delta} \left[ \left( \mathcal{L}_2^\dagger S \right) \left( \frac{iK}{\Delta} - \rho - \bar{\rho} \right) - a \sin \theta S \frac{K}{\Delta} (\rho - \bar{\rho}) \right], \quad (3.144b)$$

$$A_{\bar{m}\bar{m}0} = - \left( \sqrt{2\pi} \right) \rho^{-3} \bar{\rho} C_{\bar{m}\bar{m}} S \left[ -i \left( \frac{K}{\Delta} \right)_{,r} - \frac{K^2}{\Delta^2} - 2i\rho \frac{K}{\Delta} \right], \quad (3.144c)$$

$$A_{\bar{m}n1} = -2\sqrt{2} \left( \sqrt{2\pi} \right) \frac{C_{\bar{m}n} \rho^{-3}}{\Delta} \left[ \mathcal{L}_2^\dagger S + ia \sin \theta (\rho - \bar{\rho}) S \right], \quad (3.144d)$$

$$A_{\bar{m}\bar{m}1} = -2 \left( \sqrt{2\pi} \right) \rho^{-3} \bar{\rho} C_{\bar{m}\bar{m}} S \left( i \frac{K}{\Delta} - \rho \right), \quad (3.144e)$$

$$A_{\bar{m}\bar{m}2} = - \left( \sqrt{2\pi} \right) \rho^{-3} \bar{\rho} C_{\bar{m}\bar{m}} S. \quad (3.144f)$$

这里需要提醒读者的是，不同文章中上述表达式  $A$  的系数可能不同，尤其是  $\sqrt{2\pi}$ ，有可能出现在分母上，也有可能没有根号。这是因为 SWSH 的正交归一关系(2.174)，(2.175)定义不同。如果定义

$$\int_0^\pi |{}_s S_{lm}^{a\omega}(\theta)|^2 \sin \theta d\theta = 1, \quad (3.145)$$

则系数  $\sqrt{2\pi}$  将出现在分母上。除此之外，是否有根号取决于 Fourier 变换的定义，即 Dirac 符号(3.86)中有时定义正变换(3.86a)中不含  $1/\sqrt{2\pi}$  而逆变换(3.86b)中系数为  $1/2\pi$ ，则此时  $2\pi$  系数上没有根号。但这些定义都不影响最终的结果，只要我们在推导的过程中一以贯之，就不会搞混。

## 2.4 波形快照 (waveform snapshot)

从(3.123)式中振幅  $Z_{lm\omega}$  的表达式可知，当我们取  $r \rightarrow \infty$  时， $Z_{lm\omega}^{\text{up}} = 0$ ，因为  $\mathcal{T}_{lm\omega}(r)$  的积分上下限都是  $\infty$ ，并不会经过小黑洞的轨迹  $\delta[r - \tilde{r}(t)]$ 。将(3.143)式带入 Green 函数的表达式(3.122)，最终可以得到

$$\begin{aligned} R_{lm\omega}(r \rightarrow \infty) &= \frac{R_{lm\omega}^{\text{up}}(r \rightarrow \infty)}{W_{lm\omega}} \int_{r_+}^{\infty} R_{lm\omega}^{\text{in}}(r') \frac{\mathcal{T}_{lm\omega}(r')}{\Delta(r')^2} dr' \\ &= \frac{\mu R_{lm\omega}^{\text{up,trans}} r^3 e^{i\omega r_*}}{2i\omega R_{lm\omega}^{\text{up,trans}} R_{lm\omega}^{\text{in,inc}}} \int_{r_+}^{\infty} dr' R_{lm\omega}^{\text{in}}(r') \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t - im\tilde{\varphi}(t)} \\ &\quad \times \left[ A_0 \delta[r' - \tilde{r}(t)] + \{A_1 \delta[r' - \tilde{r}(t)]\}_{,r'} + \{A_2 \delta[r' - \tilde{r}(t)]\}_{,r'r'} \right] \quad (3.146) \\ &= \frac{\mu r^3 e^{i\omega r_*}}{2i\omega R_{lm\omega}^{\text{in,inc}}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t - im\tilde{\varphi}(t)} \left[ (A_{nn0} + A_{\bar{m}n0} + A_{\bar{m}\bar{m}0}) R_{lm\omega}^{\text{in}} \right. \\ &\quad \left. - (A_{\bar{m}n1} + A_{\bar{m}\bar{m}1}) \frac{dR_{lm\omega}^{\text{in}}}{dr'} + A_{\bar{m}\bar{m}2} \frac{d^2 R_{lm\omega}^{\text{in}}}{dr'^2} \right]_{r'=\tilde{r}(t), \theta=\tilde{\theta}(t)}, \end{aligned}$$

其中

$$A_0 = A_{nn0}(r') + A_{\bar{m}n0}(r') + A_{\bar{m}\bar{m}0}(r'), \quad A_1 = A_{\bar{m}n1}(r') + A_{\bar{m}\bar{m}1}(r'), \quad A_2 = A_{\bar{m}\bar{m}2}(r'). \quad (3.147)$$

(3.146)式最后一步先交换了  $dt$  和  $dr'$  的积分顺序（因为我们知道积分整体应当是收敛的，即引力波的振幅是一个有限值），再使用分部积分和  $\delta[r' - \tilde{r}(t)]$  在  $r' = r_+$  和  $r' = \infty$  为零消去边界项，得到最后的结果。我们最后的任务就是求出这个与  $r$  无关的积分

$$\begin{aligned} I_{lm\omega} &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t - im\tilde{\varphi}(t)} \left[ (A_{nn0} + A_{\bar{m}n0} + A_{\bar{m}\bar{m}0}) R_{lm\omega}^{\text{in}} \right. \\ &\quad \left. - (A_{\bar{m}n1} + A_{\bar{m}\bar{m}1}) \frac{dR_{lm\omega}^{\text{in}}}{dr'} + A_{\bar{m}\bar{m}2} \frac{d^2 R_{lm\omega}^{\text{in}}}{dr'^2} \right]_{r'=\tilde{r}(t), \theta=\tilde{\theta}(t)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t - im\tilde{\varphi}(t)} \tilde{J}_{lm\omega}[\tilde{r}(t), \tilde{\theta}(t)]. \end{aligned} \quad (3.148)$$

回顾一下，在本章1节，我们解析求解了 Kerr 时空有质量粒子的测地线，其中  $\tilde{r}$  方向和  $\tilde{\theta}$  方向的测地线是周期性的，如果用 Mino 时  $\lambda$  表示，则可以分解为

$$\tilde{r}(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n e^{-in\Upsilon_r \lambda}, \quad \tilde{\theta}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta_k e^{-ik\Upsilon_\theta \lambda}. \quad (3.149)$$

$t$  和  $\tilde{\varphi}$  方向的测地线根据(3.31)式可以表示成

$$t(\lambda) = \Gamma\lambda + \Delta t[\tilde{r}(\lambda), \tilde{\theta}(\lambda)], \quad \tilde{\varphi} = \Upsilon_\varphi \lambda + \Delta\varphi[\tilde{r}(\lambda), \tilde{\theta}(\lambda)]. \quad (3.150)$$

因而(3.148)式中的积分可以分解为

$$I_{lm\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i(\omega\Gamma - m\Upsilon_\varphi)\lambda} J_{lm\omega}[\lambda, \tilde{r}(\lambda), \tilde{\theta}(\lambda)], \quad (3.151)$$

其中

$$\begin{aligned} J_{lm\omega}[\lambda, \tilde{r}(\lambda), \tilde{\theta}(\lambda)] &= \frac{dt}{d\lambda} \left[ (A_{nn0} + A_{\bar{m}n0} + A_{\bar{m}\bar{m}0}) R_{lm\omega}^{\text{in}} - (A_{\bar{m}n1} + A_{\bar{m}\bar{m}1}) \frac{dR_{lm\omega}^{\text{in}}}{dr'} \right. \\ &\quad \left. + A_{\bar{m}\bar{m}2} \frac{d^2 R_{lm\omega}^{\text{in}}}{dr'^2} \right]_{r'=\tilde{r}(\lambda), \theta=\tilde{\theta}(\lambda)} e^{i\omega\Delta t[\tilde{r}(\lambda), \tilde{\theta}(\lambda)] - im\Delta\varphi[\tilde{r}(\lambda), \tilde{\theta}(\lambda)]} \\ &\equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{lmkn}(\omega) e^{-i(k\Upsilon_\theta + n\Upsilon_r)\lambda}, \end{aligned} \quad (3.152)$$

其中

$$J_{lmkn}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\phi_\theta \int_0^{2\pi} d\phi_r e^{i(k\phi_\theta + n\phi_r)} J_{lm\omega}[\tilde{r}(\phi_r), \tilde{\theta}(\phi_\theta)], \quad (3.153)$$

这里的  $\phi_r = \Upsilon_r \lambda$ ,  $\phi_\theta = \Upsilon_\theta \lambda$ 。将(3.152)式带入(3.151)式得

$$\begin{aligned} I_{lm\omega} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i(\omega\Gamma - m\Upsilon_\varphi)\lambda} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{lmkn}(\omega) e^{-i(k\Upsilon_\theta + n\Upsilon_r)\lambda} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i(\omega\Gamma - m\Upsilon_\varphi - k\Upsilon_\theta - n\Upsilon_r)\lambda} J_{lmkn}(\omega) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega\Gamma - m\Upsilon_\varphi - k\Upsilon_\theta - n\Upsilon_r) J_{lmkn}(\omega). \end{aligned} \quad (3.154)$$

代换为无穷远处观测者的坐标时频率，则最终结果为

$$I_{lm\omega} = \sum_{kn} I_{lmkn} \delta(\omega - \omega_{mkn}), \quad (3.155)$$

其中

$$I_{lmkn} = \frac{2\pi}{\Gamma} J_{lmkn}(\omega_{mkn}), \quad (3.156a)$$

$$\omega_{mkn} = m\Omega_\varphi + k\Omega_\theta + n\Omega_r, \quad (3.156b)$$

这里的  $\Omega_{\varphi,\theta,r}$  即为(3.35)式定义的坐标频率，亦即 EMRI 的波形快照的频谱。在上述推导中，我们似乎解析地得到了一切我们想要的量，但唯一需要数值计算的就是对  $\phi_r$  和  $\phi_\theta$  的二重积分(3.153)。实际上，EMRI 波形快照计算中绝大多数的计算资源都用来计算这个表达式。为此，人们也发展出了各种各样的数值算法来加速运算。但这并不是本论文的侧重点，这里不再赘述。

综上，将(3.155)式带入(3.146)得

$$R_{lm\omega}(r \rightarrow \infty) = \frac{\mu r^3 e^{i\omega r_*}}{2i\omega R_{lm\omega}^{\text{in,inc}}} \sum_{kn} I_{lmkn} \delta(\omega - \omega_{mkn}). \quad (3.157)$$

再将其带入了(3.88)并取  $s = -2$  得

$$\psi(t, r \rightarrow \infty, \theta, \varphi) = \mu r^3 \sum_{lmkn} \frac{I_{lmkn}}{2i\omega_{mkn} R_{lm\omega_{mkn}}^{\text{in,inc}}} \frac{-2S_{lm}^{a\omega_{mkn}}(\theta)}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega_{mkn}(t-r_*)+im\varphi}. \quad (3.158)$$

在计算 Teukolsky 径向方程的渐进行为时，我们已经讨论了它与 EMRI 波形的关系，即(2.196)式，因此最终得到的 EMRI 波形快照表示为

$$h_+ - ih_\times = -\frac{2\mu}{r} \sum_{lmkn} \frac{Z_{lmkn}}{\omega_{mkn}^2} \frac{S_{lmkn}(\theta)}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega_{mkn}(t-r_*)+im\varphi}, \quad (3.159)$$

这里的

$$Z_{lmkn} \equiv \frac{I_{lmkn}}{2i\omega_{mkn} R_{lm\omega_{mkn}}^{\text{in,inc}}}, \quad S_{lmkn}(\theta) \equiv -2S_{lm}^{a\omega_{mkn}}(\theta). \quad (3.160)$$

之所以不将(3.159)式中的  $Z_{lmkn}$  与分母上  $\omega_{mkn}^2$  合并是为了区分它们的来源，其中  $Z_{lmkn}$  完全来自 Green 函数法构造的非齐次项， $1/\omega_{mkn}^2$  来自 Weyl 标量的渐进行为  $\Psi_4^B(r \rightarrow \infty) = r^{-4}\psi(r \rightarrow \infty) = (\ddot{h}_+ - i\dot{h}_\times)/2$ 。

下面展示一些具体的计算结果，所有的波形均使用 Black Hole Perturbation Toolkit 中的 Mathematica 代码 Teukolsky.m 实现。其中其次 Teukolsky 方程的基函数  $R_{lm\omega}^{\text{in}}(r)$  使用 MST 方法得到，二重积分(3.153)使用 Method -> “Trapezoidal” 进行数值计算。最终结果的是无穷多  $l, m, k, n$  模式的叠加，因此需要设置截断，此处截断到  $l_{\text{max}} = k_{\text{max}} = n_{\text{max}} = 9$ 。

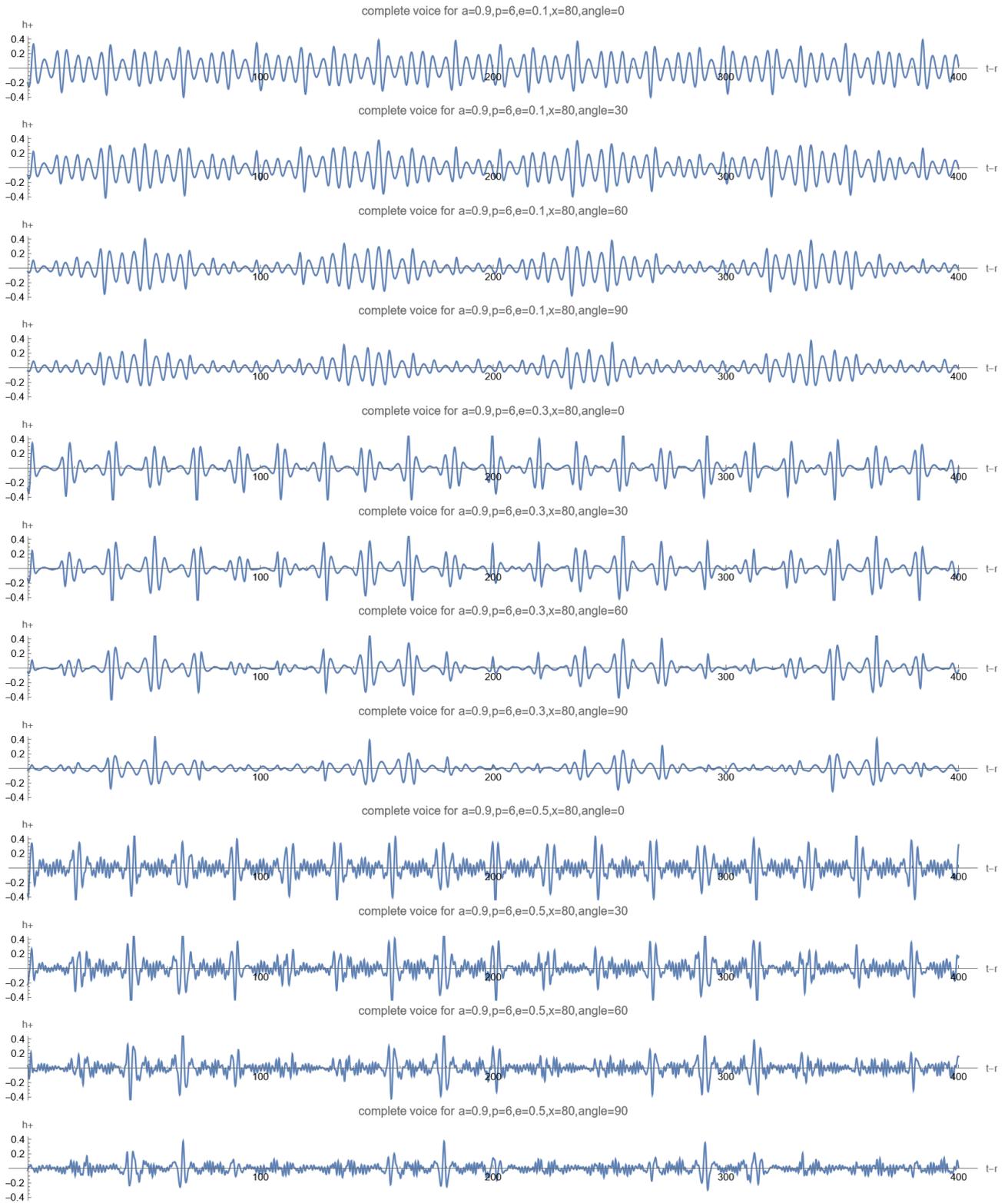


图 3.3 不同轨道参数  $(a, p, e, x)$  和观测角  $\theta$  下的 EMRI waveform snapshot。上面 12 组波形中，从上到下采用的参数依次为  $(0.9, 6, 0.1, \cos 80^\circ)$  观测角  $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ ， $(0.9, 6, 0.3, \cos 80^\circ)$  观测角  $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ ， $(0.9, 6, 0.5, \cos 80^\circ)$  观测角  $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  的波形。

在这些设置下，我们选取了一些参数进行波形的绘制，如图 3.3。需要给定的参数有轨道

参数  $(a, p, e, x = \cos \theta_{\text{inc}})$  和观测者的空间方向  $(\theta, \varphi)$ ，其中我们人为地设置  $\varphi = 0$ ，因为 Kerr 时空是轴对称的。此外，我们只取最后结果的实部得到  $h_+$ ，纵轴用  $rc^2/G\mu$  归一，横轴为推迟时  $t - r_*$ ，用  $GM/c^3$  归一。

从图3.3中可以看出，当我们增大轨道偏心率  $e$  时，波形中产生明显的调制信号，如  $e = 0.3$  时我们可以观察到比较平缓的区域，对应于小黑洞运行到远心点  $r_{\text{max}}$  时的引力辐射；也可以观察到振幅较大的区域，对应于小黑洞运行到近心点  $r_{\text{min}}$  时的引力辐射。但如果进一步增大偏心率，如  $e = 0.5$  时，波形开始出现高频锯齿状结构。这里需要澄清的一点是，波形本身应当是平滑的，只是较大的  $e$  要求我们截断的  $n_{\text{max}}$  值也要相应增大，而我们这里选取的  $n_{\text{max}} = 9$  已经不适用于  $e = 0.5$  的情形。但由于所有的数值计算都在本人的笔记本电脑上进行，因此取更大的  $n_{\text{max}}$  将会大大增加计算时间（对于  $n_{\text{max}} = 15$  可能需要一整天时间），因此这里展示的结果并不代表真实的波形。其次，对于较大的  $e$ ，远心点  $r_{\text{max}}$  本身也较大，这会导致另一个十分严重的问题——Teukolsky 方程 Green 函数积分的发散。这在我们证明(3.95)式时曾经提到过。这个发散是因为我们在构造 Green 函数时忽略了可能导致发散的边界项。真正严格的方式是通过分部积分法将发散的项全部提出积分之外，从而构造出一个抵消函数，这个函数在  $r$  较大时会抵消那些可能导致发散的项。这个方法在 Poisson 1996 中被提出 [138]，称为 Teukolsky 方程的正规化 (Regularization)。但在  $r$  较小时，抵消函数的贡献可以忽略，因此对于  $e$  较小的情形，我们可以使用未经修正的 Teukolsky 方程计算波形。

### 3. 有演化的波形计算：Self-force 理论与 adiabatic 近似

引力辐射会导致 EMRI 轨道的衰减，小黑洞会逐渐“旋进”，最终掉进大黑洞中，因此上一节中得到的 EMRI 波形快照只在很短的时标内有效。超过这一时标，真正的 EMRI 波形将会与 snapshot 之间产生相位差，并且相位差随时间逐渐积累。为了解决这个问题，人们发展出了各种各样的方法，采取了不同的视角。此处我们重点介绍的是由 Mino 等人在 1997 年首次推导的 Gravitational Self-Force (GSF) 理论 [139,140]，和 Hinderer & Flanagan 2008 提出的双时标展开法 [93]。本节中，我们将对这些理论进行简要的介绍，并额外介绍一个利用守恒律近似计算一阶 GSF 耗散部分的方法——adiabatic 近似。

#### 3.1 Self-Force 理论与双时标展开

在上一章介绍黑洞微扰论时，我们已经提到了度规微扰的思想(2.1)，即真正的时空度规应当是背景 Kerr 度规  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  加上一些扰动项  $h_{\mu\nu}$ 。在 EMRI 的情形中，我们的度规微扰有了确切的物理起源，即小黑洞自身的度规。但广义相对论是一个非线性的理论，真正的时空度规

并不能写成大黑洞度规和小黑洞度规的线性叠加，而是一个质量比  $\varepsilon = \mu/M$  的展开式：

$$g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}^{(1)} + \varepsilon^2 h_{\mu\nu}^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (3.161)$$

显然，如果用这样一个度规，小黑洞的轨迹  $\gamma$  将偏离 Kerr 时空的测地线(3.10)。真正的运动方程 (Equation of Motion) 也可以相应地表示为

$$\frac{D^2 z^\mu}{d\tau^2} = \varepsilon f_1^\mu + \varepsilon^2 f_2^\mu + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (3.162)$$

上面的展开式中的  $f_1^\mu, f_2^\mu, \dots$  被称为 self-force，因为它们产生的原因是小黑洞自身对时空的微扰作用于它们自己身上。对于 n 阶 self-force，我们采用 nSF 的记号，如  $f_1^\mu$  标记为 1SF， $f_2^\mu$  标记为 2SF。当然，我们可以展开到无穷阶，并且展开的阶数越高，我们得到的小黑洞轨迹越精确。但是每提高一阶，计算的难度是指数级升高的，因此我们需要权衡到底展开到多少阶，对于 EMRI 波形计算是足够的。回到物理的角度，轨道演化是因为引力波带走了轨道能量（还有角动量和 Carter 常数），这一过程的时标可以通过  $\dot{E} \sim \dot{h}^2 \sim \varepsilon^2$  以及  $E \sim \mu \sim \varepsilon$  进行估计，即轨道演化时标为  $\tau_{\text{radi}} \equiv E/\dot{E} \sim 1/\varepsilon \sim GM^2/\mu c^3$ 。这个时标也被称为辐射时标 (radiation reaction timescale)。

假设我们知道了  $f_1^\mu$  但不知道  $f_2^\mu$ ，则小黑洞轨迹的误差为

$$\frac{D^2 \delta z^\mu}{d\tau^2} \sim \varepsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \delta z^\mu \sim \varepsilon^2 \tau_{\text{radi}}^2 \sim \mathcal{O}(1). \quad (3.163)$$

这意味着，如果追踪小黑洞的轨道相位，则最终会积累  $\delta\Phi \sim 1\text{rad}$  的误差。在这样的误差下，我们能够通过数据处理 (data analysis) 找到信号，但最终的参数估计 (parameter estimation) 会由于这个误差的存在而不够准确。运用同样的分析方法，我们可以推出，如果我们能够知道  $f_2^\mu$ ，则最终的误差为  $\delta z^\mu \sim \mathcal{O}(\varepsilon)$ ，这对于我们追踪轨道演化已经足够精确。综上，1SF 已经足够我们找到信号并追踪它的演化，2SF 的加入能够帮助我们做非常精确的参数估计。

现在，我们将从一个更一般性的角度来看这个问题，即实际的度规 (exact metric) 实际上是某个参数  $\varepsilon$  的函数，只是在 EMRI 的情况下，我们赋予了  $\varepsilon$  质量比的物理含义。若  $\varepsilon \ll 1$ ，则我们可以进行如下的 Taylor 展开

$$g_{\mu\nu}(\varepsilon) = g_{\mu\nu}(0) + \varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} g_{\mu\nu} \Big|_{\varepsilon=0} + \varepsilon^2 \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\varepsilon^2} g_{\mu\nu} \Big|_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (3.164)$$

将(3.164)与(3.161)式对比可知，

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(0), \quad h_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{d}{d\varepsilon} g_{\mu\nu} \Big|_{\varepsilon=0}, \quad h_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\varepsilon^2} g_{\mu\nu} \Big|_{\varepsilon=0}, \quad h_{\mu\nu}^{(n)} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\varepsilon^n} g_{\mu\nu} \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (3.165)$$

因此总的扰动为

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\varepsilon) - \tilde{g}_{\mu\nu} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n h_{\mu\nu}^{(n)}. \quad (3.166)$$

实际的度规下，Einstein 场方程（Einstein Field Equation, EFE）表示为

$$G_{\mu\nu}[\mathbf{g}] = G_{\mu\nu}[\bar{\mathbf{g}} + \mathbf{h}] = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (3.167)$$

### 3.1.1 EFE 的逐阶展开

我们想要从中提取出每一阶的扰动  $h_{\mu\nu}^{(n)}$  所满足的方程。这需要从头开始一点点推导，正如我们在(2.9)式中所做的那样。Einstein 张量  $G_{\mu\nu}[\mathbf{g}]$  来自 Riemann 张量  $R_{\mu\nu\rho\gamma}[\mathbf{g}]$ ，从而来自协变导数的对易  $\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu$ 。为了方便计算，我们定义  $C^\mu{}_{\nu\gamma}$  满足

$$(\nabla_\nu - \tilde{\nabla}_\nu) \omega^\mu = C^\mu{}_{\nu\gamma} \omega^\gamma, \quad (3.168)$$

对于任意  $\omega^\gamma$  都成立，其中  $\nabla_\nu$  是由实际度规  $g_{\mu\nu}$  构建的协变导数， $\tilde{\nabla}_\nu$  是由背景度规  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  构建的协变导数。由于协变导数可以表示成一般导数再加上对于 Christoffel 联络的贡献，从而有

$$C^\mu{}_{\nu\gamma} \omega^\gamma = (\partial_\nu \omega^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\gamma} \omega^\gamma - \partial_\nu \omega^\mu - \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\nu\gamma} \omega^\gamma) = (\Gamma^\mu{}_{\nu\gamma} - \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\nu\gamma}) \omega^\gamma, \quad (3.169)$$

即

$$C^\mu{}_{\nu\gamma} = \Gamma^\mu{}_{\nu\gamma} - \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\nu\gamma}. \quad (3.170)$$

虽然 Christoffel 联络本身不是张量，但是两个 Christoffel 联络之差可以消去那些非张量的部分，使得  $C^\mu{}_{\nu\gamma}$  是一个张量。由于 Christoffel 联络无挠  $\Gamma^\mu{}_{\nu\gamma} = \Gamma^\mu{}_{\gamma\nu}$ ，因此  $C^\mu{}_{\nu\gamma} = C^\mu{}_{\gamma\nu}$ 。如果我们选取背景时空的一个 Riemann 法坐标系（Riemann Normal Coordinates, RNC），则  $\tilde{\Gamma}^\mu{}_{\nu\gamma} = 0$ ，从而  $C^\mu{}_{\nu\gamma}$  可以化简为

$$\begin{aligned} C^\mu{}_{\nu\gamma} &= \Gamma^\mu{}_{\nu\gamma} \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (\partial_\nu g_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\nu\gamma}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (\tilde{\nabla}_\nu g_{\gamma\alpha} + \tilde{\nabla}_\gamma g_{\nu\alpha} - \tilde{\nabla}_\alpha g_{\nu\gamma}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (\tilde{\nabla}_\nu h_{\gamma\alpha} + \tilde{\nabla}_\gamma h_{\nu\alpha} - \tilde{\nabla}_\alpha h_{\nu\gamma}). \end{aligned} \quad (3.171)$$

注意这里的  $g^{\mu\nu}$  应当遵循(2.5)-(2.7)的升降法则。在领头阶，我们有

$$g^{\mu\nu} = \tilde{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2), \quad h^{\mu\nu} = \tilde{g}^{\mu\alpha} \tilde{g}^{\nu\beta} h_{\alpha\beta}. \quad (3.172)$$

所以  $C^\mu{}_{\nu\gamma}$  的领头阶表示为

$$C^\mu{}_{\nu\gamma} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\alpha} (\tilde{\nabla}_\nu h_{\gamma\alpha} + \tilde{\nabla}_\gamma h_{\nu\alpha} - \tilde{\nabla}_\alpha h_{\nu\gamma}) + \mathcal{O}(h^2). \quad (3.173)$$

运用 Riemann 张量的定义

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\rho} \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\sigma} \Gamma^\alpha{}_{\nu\rho}. \quad (3.174)$$

我们可以得到实际的 Riemann 张量为

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \tilde{R}^\mu{}_{\nu\rho\sigma} + 2\partial_{[\rho} C^\mu{}_{\sigma]\nu} + 2C^\mu{}_{\alpha[\rho} C^\alpha{}_{\sigma]\nu} + 2C^\mu{}_{\alpha[\rho} \tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\sigma]\nu} + \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\alpha[\rho} C^\alpha{}_{\sigma]\nu}. \quad (3.175)$$

如果取 RNC, 则上述结果化简为

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \tilde{R}^\mu{}_{\nu\rho\sigma} + 2\tilde{\nabla}_{[\rho} C^\mu{}_{\sigma]\nu} + 2C^\mu{}_{\alpha[\rho} C^\alpha{}_{\sigma]\nu}. \quad (3.176)$$

进一步地, 我们可以得到 Ricci 张量

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} + 2\tilde{\nabla}_{[\rho} C^\rho{}_{\nu]\mu} + 2C^\rho{}_{\alpha[\rho} C^\alpha{}_{\nu]\mu}. \quad (3.177)$$

最后 EFE 表示为

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (3.178)$$

我们想将 EFE 表示为  $\varepsilon$  的展开式。为此, 我们定义一些记号, 对于一个张量  $F[\mathbf{g}]$ , 我们定义

$$\delta^n F[\mathbf{h}] \equiv \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} F[\tilde{\mathbf{g}} + \lambda\mathbf{h}] \Big|_{\lambda=0}. \quad (3.179)$$

通过(3.173)式, 我们知道了  $C^\mu{}_{\nu\gamma}$  的领头阶是  $\sim \mathcal{O}(h)$ , 因此 Ricci 张量(3.177)中  $2C^\rho{}_{\alpha[\rho} C^\alpha{}_{\nu]\mu} \sim \mathcal{O}(h^2)$ 。而背景 Ricci 张量  $\tilde{R}_{\mu\nu} = 0$  与  $h_{\mu\nu}$  无关, 因此 Ricci 张量在  $h_{\mu\nu}$  的领头阶贡献仅出自

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= 2\tilde{\nabla}_{[\rho} \delta C^\rho{}_{\nu]\mu} \\ &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{\rho\sigma} \left( \tilde{\nabla}_\rho \tilde{\nabla}_\nu h_{\mu\sigma} + \tilde{\nabla}_\rho \tilde{\nabla}_\mu h_{\nu\sigma} - \tilde{\nabla}_\rho \tilde{\nabla}_\sigma h_{\mu\nu} - \cancel{\tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\rho h_{\mu\sigma}} - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu h_{\rho\sigma} + \cancel{\tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\sigma h_{\mu\rho}} \right) \\ &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{\rho\sigma} \left( \tilde{\nabla}_\rho \tilde{\nabla}_\nu h_{\mu\sigma} + \tilde{\nabla}_\rho \tilde{\nabla}_\mu h_{\nu\sigma} - \tilde{\nabla}_\rho \tilde{\nabla}_\sigma h_{\mu\nu} - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu h_{\rho\sigma} \right) \\ &= -\frac{1}{2}\tilde{\square} h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu h + \tilde{\nabla}^\rho \tilde{\nabla}_{(\mu} h_{\nu)\rho}, \end{aligned} \quad (3.180)$$

其中  $\tilde{\square} \equiv \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu$ ,  $h \equiv \tilde{g}^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ 。如果我们定义迹反度规微扰

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}h, \quad (3.181)$$

并运用 Ricci 恒等式

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}\omega^\nu = (\nabla_\rho \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\rho)\omega^\mu, \quad (3.182)$$

则(3.180)中最后一项可以转换为

$$\tilde{\nabla}^\rho \tilde{\nabla}_{(\mu} h_{\nu)\rho} = \tilde{\nabla}_{(\mu} \tilde{\nabla}^\rho h_{\nu)\rho} + \tilde{R}_{\sigma(\nu\mu)\rho} h^{\sigma\rho} = \tilde{\nabla}_{(\mu} \tilde{\nabla}^\rho h_{\nu)\rho} - \tilde{R}_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma} h_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} (\cancel{\tilde{R}_{\mu\rho\nu\sigma}} - \cancel{\tilde{R}_{\mu\sigma\nu\rho}}) h^{\rho\sigma}. \quad (3.183)$$

最后一项是反对称张量与对称张量的缩并，故为零。带入(3.180)式得到

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \tilde{\square} h_{\mu\nu} - \tilde{R}_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma} h_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{\nabla}_{\nu} h + \tilde{\nabla}_{(\mu} \tilde{\nabla}^{\rho} h_{\nu)\rho} \\ &= -\frac{1}{2} \tilde{\square} h_{\mu\nu} - \tilde{R}_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma} h_{\rho\sigma} - \cancel{\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{\nabla}_{\nu} h} + \tilde{\nabla}_{(\mu} \tilde{\nabla}^{\rho} \bar{h}_{\nu)\rho} + \cancel{\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_{(\mu} \tilde{\nabla}^{\rho} \tilde{g}_{\nu)\rho} h} \\ &= -\frac{1}{2} \tilde{\square} h_{\mu\nu} - \tilde{R}_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma} h_{\rho\sigma} + \tilde{\nabla}_{(\mu} \tilde{\nabla}^{\rho} \bar{h}_{\nu)\rho}. \end{aligned} \quad (3.184)$$

最后一步的抵消证明如下：

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{\nabla}_{\nu} h + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_{(\mu} \tilde{\nabla}^{\rho} \tilde{g}_{\nu)\rho} h &= -\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{\nabla}_{\nu} h + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_{(\mu} \tilde{\nabla}_{\nu)} h \\ &= \frac{1}{4} (\tilde{\nabla}_{\nu} \tilde{\nabla}_{\mu} - \tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{\nabla}_{\nu}) \tilde{g}^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{4} \tilde{R}^{\rho}{}_{\gamma\nu\mu} \tilde{g}^{\gamma\sigma} h_{\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{4} \tilde{R}^{\rho\sigma}{}_{\nu\mu} h_{\rho\sigma} \\ &= 0. \quad (\text{反对称张量与对称张量缩并}) \end{aligned} \quad (3.185)$$

与(3.180)式相比(3.184)式的结果似乎更加复杂，但我们之后会看到这样表示的好处。将(3.184)式代入(3.178)式得

$$\begin{aligned} \delta G_{\mu\nu} &= \delta \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \right) \\ &= \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \cancel{\tilde{R}} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \delta g^{\rho\sigma} \cancel{\tilde{R}_{\rho\sigma}} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\rho\sigma} \delta R_{\rho\sigma} \\ &= \left( \tilde{g}_{\mu}{}^{\rho} \tilde{g}_{\nu}{}^{\sigma} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\rho\sigma} \right) \delta R_{\rho\sigma} \\ &= -\frac{1}{2} \tilde{\square} \bar{h}_{\mu\nu} - \tilde{R}_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma} \bar{h}_{\rho\sigma} + \tilde{\nabla}_{(\mu} \tilde{\nabla}^{\rho} \bar{h}_{\nu)\rho} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_{\rho} \tilde{\nabla}_{\sigma} \bar{h}^{\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (3.186)$$

同样地，我们可以从  $R_{\mu\nu}[g]$  中推导出  $\delta^2 R_{\mu\nu}$ ，从而得到

$$\begin{aligned} \delta^2 G_{\mu\nu} &= \delta^2 \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma} \right) \\ &= \left( \tilde{g}_{\mu}{}^{\rho} \tilde{g}_{\nu}{}^{\sigma} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\rho\sigma} \right) \delta^2 R_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} (h_{\mu\nu} \tilde{g}^{\rho\sigma} - \tilde{g}_{\mu\nu} h^{\rho\sigma}) \delta R_{\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (3.187)$$

其中

$$\begin{aligned} \delta^2 R_{\rho\sigma} &= \frac{1}{4} \tilde{\nabla}_{\rho} h^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_{\sigma} h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^{\nu} h^{\mu}{}_{\sigma} (\tilde{\nabla}_{\nu} h_{\mu\rho} - \tilde{\nabla}_{\mu} h_{\nu\rho}) \\ &\quad - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} (2\tilde{\nabla}_{\nu} \tilde{\nabla}_{(\sigma} h_{\rho)\mu} - \tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{\nabla}_{\nu} h_{\rho\sigma} - \tilde{\nabla}_{\rho} \tilde{\nabla}_{\sigma} h_{\mu\nu}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_{\nu} \bar{h}^{\mu\nu} (2\tilde{\nabla}_{(\sigma} h_{\rho)\mu} - \tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{\nabla}_{\nu} h_{\rho\sigma}). \end{aligned} \quad (3.188)$$

展开到二阶的 EFE 表示为

$$G_{\mu\nu}[\tilde{g}] + \delta G_{\mu\nu}[\mathbf{h}] + \delta^2 G_{\mu\nu}[\mathbf{h}] + \mathcal{O}(h^3) = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (3.189)$$

注意这里的  $h_{\mu\nu}$  是定义在(3.166)式的总的扰动，我们还没有把它展开成  $\varepsilon$  的幂次形式。我们把 EFE 右侧的源也进行 Taylor 展开得到

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon T_{\mu\nu}^{(1)} + \varepsilon^2 T_{\mu\nu}^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (3.190)$$

将(3.166)和(3.190)式都代入(3.189)式得

$$\varepsilon \delta G_{\mu\nu} [h^{(1)}] + \varepsilon^2 (\delta G_{\mu\nu} [h^{(2)}] + \delta^2 G_{\mu\nu} [h^{(1)}]) = \varepsilon T_{\mu\nu}^{(1)} + \varepsilon^2 T_{\mu\nu}^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (3.191)$$

上式中所有关于  $\varepsilon$  的依赖都被展开为 Taylor 序列。由于上述推导与  $\varepsilon$  的取值无关，等式的成立要求关于  $\varepsilon$  逐阶相等，即

$$\delta G_{\mu\nu} [h^{(1)}] = 8\pi T_{\mu\nu}^{(1)}, \quad (3.192a)$$

$$\delta G_{\mu\nu} [h^{(2)}] = 8\pi T_{\mu\nu}^{(2)} - \delta^2 G_{\mu\nu} [h^{(1)}]. \quad (3.192b)$$

### 3.1.2 Lorentz 规范

在进行下一步推导之前，我们先讨论另一个问题：微扰论的规范自由度 (gauge freedom)。规范自由度的产生是由于我们选取不同的坐标系，描述同一物理过程的方程形式可能不同。但真实的物理不会随着选取不同的坐标系而不同，因此我们就有了一些自由度来选择到底在哪个坐标系中描述这些物理过程。考虑一个用  $\varepsilon$  度量的坐标变换

$$x^{\mu'} = x^\mu - \varepsilon \xi^\mu + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.193)$$

则度规的变换表示为

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x^{\gamma'}) &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^{\nu}} g_{\rho\sigma}(x^\gamma) \\ &= \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} (x'^{\rho} + \varepsilon \xi^\rho) \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} (x'^{\sigma} + \varepsilon \xi^\sigma) g_{\rho\sigma}(x'^{\gamma} + \varepsilon \xi'^{\gamma}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= (\delta^\rho_\mu + \varepsilon \partial_\mu \xi^\rho) (\delta^\sigma_\nu + \varepsilon \partial_\nu \xi^\sigma) [g_{\rho\sigma}(x'^{\gamma}) + \varepsilon \xi'^{\gamma} \partial_\gamma g_{\rho\sigma}] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= g_{\mu\nu} + \varepsilon [\xi^\gamma \partial_\gamma g_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi^\rho g_{\rho\nu} + \partial_\nu \xi^\sigma g_{\mu\sigma}] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \tilde{g}_{\mu\nu} + \varepsilon [h_{\mu\nu}^{(1)} + \xi^\gamma \partial_\gamma \tilde{g}_{\mu\nu} + (\partial_\mu \xi^\rho) \tilde{g}_{\rho\nu} + (\partial_\nu \xi^\sigma) \tilde{g}_{\mu\sigma}] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \tilde{g}_{\mu\nu} + \varepsilon [h_{\mu\nu}^{(1)} + \mathcal{L}_\xi \tilde{g}_{\mu\nu}] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (3.194)$$

这里的  $\mathcal{L}_\xi$  正是第二章介绍的 Lie 导数，其作用在张量上的一般形式定义为(2.36)式。可以证明，Lie 导数中的普通导数可以直接换成协变导数：

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\xi S_{\mu\nu} &= \xi^\rho \nabla_\rho S_{\mu\nu} + S_{\rho\nu} \nabla_\mu \xi^\rho + S_{\mu\rho} \nabla_\nu \xi^\rho \\
 &= \xi^\rho \partial_\rho S_{\mu\nu} - \cancel{\xi^\rho \Gamma^\sigma_{\mu\rho} S_{\sigma\nu}} - \cancel{\xi^\rho \Gamma^\sigma_{\nu\rho} S_{\mu\sigma}} + S_{\rho\nu} \partial_\mu \xi^\rho + \cancel{S_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\sigma\mu} \xi^\sigma} \\
 &\quad + S_{\mu\rho} \partial_\nu \xi^\rho + \cancel{S_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\sigma\nu} \xi^\sigma} \\
 &= \xi^\rho \partial_\rho S_{\mu\nu} + S_{\rho\nu} \partial_\mu \xi^\rho + S_{\mu\rho} \partial_\nu \xi^\rho.
 \end{aligned} \tag{3.195}$$

对于度规张量来说

$$\mathcal{L}_\xi \tilde{g}_{\mu\nu} = \xi^\gamma \cancel{\tilde{\nabla}_\gamma \tilde{g}_{\mu\nu}} + \tilde{\nabla}_\mu \xi^\rho \tilde{g}_{\rho\nu} + \tilde{\nabla}_\nu \xi^\sigma \tilde{g}_{\mu\sigma} = 2\tilde{\nabla}_{(\mu} \xi_{\nu)}. \tag{3.196}$$

通过(3.186)式，我们可以得到  $\delta G_{\mu\nu} [\mathcal{L}_\xi \tilde{g}] = 0$ ，证明如下：由(3.180)式

$$\begin{aligned}
 \delta R_{\mu\nu} [\mathcal{L}_\xi \tilde{g}] &= -\frac{1}{2} \tilde{g}^{\rho\sigma} \left( \tilde{\nabla}_\rho \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu \xi_\sigma + \tilde{\nabla}_\rho \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\sigma \xi_\mu + \tilde{\nabla}_\rho \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \xi_\sigma + \tilde{\nabla}_\rho \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\sigma \xi_\nu \right. \\
 &\quad \left. - \tilde{\nabla}_\rho \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\mu \xi_\nu - \tilde{\nabla}_\rho \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \xi_\mu - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\rho \xi_\sigma - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\sigma \xi_\rho \right).
 \end{aligned} \tag{3.197}$$

通过交换求导之间的顺序，上式中的 8 项刚好可以两两相消，即  $\delta R_{\mu\nu} [\mathcal{L}_\xi \tilde{g}] = 0$ 。再由(3.186)式可知  $\delta G_{\mu\nu} [\mathcal{L}_\xi \tilde{g}] = 0$ 。定义(3.194)式中的

$$h'_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu}^{(1)} + \mathcal{L}_\xi \tilde{g}_{\mu\nu}, \tag{3.198}$$

则

$$\delta G_{\mu\nu} [h'] = \delta G_{\mu\nu} [h^{(1)}] = 8\pi T_{\mu\nu}^{(1)}, \tag{3.199}$$

这说明  $\delta G_{\mu\nu}$  是规范不变的。这个结论的更一般的表述为：如果一个任意的张量  $T^{\alpha\dots\beta\dots}$  可以展开为

$$T^{\alpha\dots\beta\dots} = T_0^{\alpha\dots\beta\dots} + \varepsilon T_1^{\alpha\dots\beta\dots} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{3.200}$$

则  $\Delta_\xi T_1^{\alpha\dots\beta\dots} = \mathcal{L}_\xi T_0^{\alpha\dots\beta\dots}$ 。对于我们所考虑的情形，显然有  $\mathcal{L}_\xi G[\tilde{g}] = 0$ ，因为无微扰的背景本身就对应真空解  $G[\tilde{g}] = 0$ 。

基于上述结论，我们可以选取 Lorenz 规范

$$\tilde{\nabla}_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0, \tag{3.201}$$

即

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_\mu \bar{h}_{\text{new}}^{\mu\nu} &= \tilde{\nabla}_\mu \left( h_{\text{new}}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{g}_{\rho\sigma} h_{\text{new}}^{\rho\sigma} \right) \\
&= \tilde{\nabla}_\mu h_{\text{new}}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^\nu (\tilde{g}_{\rho\sigma} h_{\text{new}}^{\rho\sigma}) \\
&= \tilde{\nabla}_\mu h_{\text{old}}^{\mu\nu} + \tilde{\nabla}_\mu (\tilde{\nabla}^\mu \xi^\nu + \tilde{\nabla}^\nu \xi^\mu) - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^\nu h_{\text{old}} - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^\nu (2\tilde{\nabla}_\mu \xi^\mu) \\
&= \tilde{\nabla}_\mu \bar{h}_{\text{old}}^{\mu\nu} + \tilde{\nabla}^\mu \tilde{\nabla}^\nu \xi_\mu - \tilde{\nabla}^\nu \tilde{\nabla}^\mu \xi_\mu + \tilde{\square} \xi^\nu \\
&= \tilde{\nabla}_\mu \bar{h}_{\text{old}}^{\mu\nu} + \tilde{R}^\rho{}_{\sigma\rho}{}^\nu \xi^\sigma + \tilde{\square} \xi^\nu \\
&= \tilde{\nabla}_\mu \bar{h}_{\text{old}}^{\mu\nu} + \tilde{\square} \xi^\nu.
\end{aligned} \tag{3.202}$$

上式的推导告诉我们，通过解  $\tilde{\square} \xi^\nu = -\tilde{\nabla}_\mu \bar{h}_{\text{old}}^{\mu\nu}$ ，我们就可以将任意一种规范转换到 Lorenz 规范。于是(3.186)式化简为

$$\delta G_{\mu\nu}[h^{\text{Lorenz}}] = -\frac{1}{2} \tilde{\square} \bar{h}_{\mu\nu}^{(1)} - \tilde{R}_{\mu}{}^\rho{}_\nu{}^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma}^{(1)}. \tag{3.203}$$

或

$$E_{\mu\nu}[\bar{h}^{(1)}] \equiv \tilde{\square} \bar{h}_{\mu\nu}^{(1)} + 2\tilde{R}_{\mu}{}^\rho{}_\nu{}^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma}^{(1)} = -16\pi T_{\mu\nu}^{(1)}, \tag{3.204}$$

若扰动时空的物体（小黑洞）的尺度远小于时空曲率，则可以取点粒子近似，其能动量张量表示为(3.130)式。

### 3.1.3 双时标展开

前面已经提到，EMRI 系统有两个时标，即轨道时标和辐射时标。其中，轨道时标描述轨道相位  $\phi_\alpha = \{\phi_r, \phi_\theta, \phi_\varphi\}$  的演化，辐射时标描述轨道常数  $J_\alpha = \{\mathcal{E}, \mathcal{L}_z, \mathcal{Q}\}$  的演化。这里的相位角有实际的物理对应。在本章第1节我们推导了 Kerr 时空下有质量粒子的测地线。由(3.16)式，我们可以用  $\phi_r, \phi_\theta$  将轨道参数化为

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi_r}, \quad \cos \theta = \cos \theta_{\min} \cos \phi_\theta. \tag{3.205}$$

轨道时标也可以用(3.35)式的坐标频率来量化表示。我们将轨道常数的演化展开成

$$J_\alpha(t, \varepsilon) = J_\alpha^0(\tilde{t}) + \varepsilon J_\alpha^1(\tilde{t}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{3.206}$$

其中  $\tilde{t} = \varepsilon t$  为“慢时标”，意味着当“快时标”  $t$  经过一个辐射时标时，“慢时标”  $\tilde{t}$  经过一个轨道时标，即

$$\frac{d\phi^\alpha}{dt} = \Omega^\alpha = \Omega_0^\alpha[J^0(\tilde{t})] + \varepsilon \Omega_1^\alpha[J^0(\tilde{t}), J^1(\tilde{t})] + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{3.207}$$

积分可得

$$\phi^\alpha = \int \Omega^\alpha dt = \frac{1}{\varepsilon} \int \Omega^\alpha d\tilde{t} = \frac{1}{\varepsilon} \phi_0^\alpha(\tilde{t}) + \phi_1^\alpha(\tilde{t}) + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (3.208)$$

这就是引言中介绍的(1.1)式的来源。这里的表达式中忽略了瞬时共振 (transient resonance)，即在某些参数下，(3.29)中定义的 Mino 频率  $\Lambda_r$  和  $\Lambda_\theta$  满足简单整数比

$$n_r \Lambda_r = n_\theta \Lambda_\theta, \quad n_r, n_\theta \in \mathbb{Z}, \quad (3.209)$$

此时轨迹在  $r - \theta$  平面上闭合，如图3.4所示。这个共振相比于一般意义上的  $r - \varphi$  共振造成的影响更加严重，因为它是会将小黑洞“踢” (kick) 到一个与原来大不相同的轨道上，使得引力波信号 dephase，大大提高探测难度。在共振轨道上，随时间线形演化的  $\Omega_0 t$  项为 0，因此主导相位演化的是时间的二次项  $\sim d\Omega/d\tilde{t}|_{t_{\text{res}}}(t - t_{\text{res}})^2$ ，导致(3.208)式中加入  $\varepsilon^{-1/2}, \varepsilon^{1/2}, \dots$  的半整数阶修正。人们很早就意识到了这个问题对此开展了很多研究 [141–147]，但这不是本文要讨论的重点，这里提到这个问题是为了引起读者对它的重视。

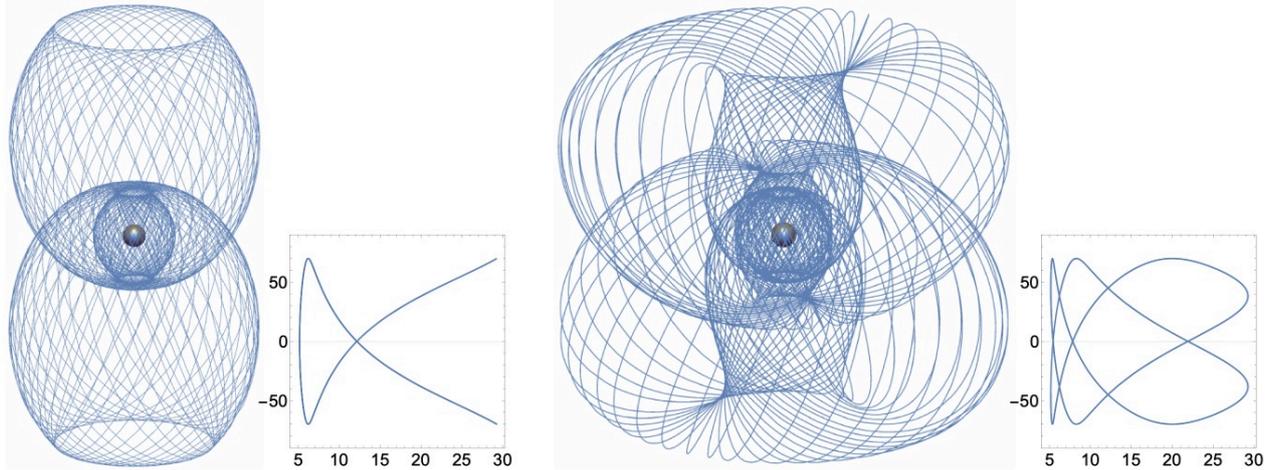


图 3.4  $n_r : n_\theta = 2 : 3$  的共振轨道示意图。图片出自 Barack & Pound 2019 [148]。

在双时标展开下，小黑洞的轨迹和它产生的度规微扰可以表示为

$$z^\alpha = z_0^\alpha(J_0^\beta, \phi_\beta) + \varepsilon z_1^\alpha(J_0^\beta, J_1^\beta, \phi_\beta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.210a)$$

$$h_{\mu\nu} = \varepsilon h_{\mu\nu}^{(1)}(x^i, \tilde{t}, J_0^\gamma, \phi_\gamma) + \varepsilon^2 h_{\mu\nu}^{(2)}(x^i, \tilde{t}, J_0^\gamma, J_1^\gamma, \phi_\gamma) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (3.210b)$$

其中  $x^i = r, \theta, \varphi$  表示空间部分。这里  $h_{\mu\nu}$  中  $\tilde{t}$  的依赖来自于除  $\mathcal{E}, \mathcal{L}_z, \mathcal{Q}$  之外的缓变物理量，如大黑洞由于吸收引力波，其质量  $M$  和角动量  $J = Ma$  都会有所变化。如果把它们都纳入  $J_\alpha$  之内，我们也可以消去对  $\tilde{t}$  的依赖。由于  $x^i$  是周期性的，我们可以将其写为不同 Fourier 模式的叠加

$$h_{\mu\nu}^{(n)} = \sum_{k_\alpha \in \mathbb{Z}} h_{\mu\nu}^{(n, k_\alpha)}(x^i, \tilde{t}) e^{-ik_\alpha \phi^\alpha}. \quad (3.211)$$

将(3.206),(3.207),(3.210),(3.211)全部代入(3.192)可得

$$\delta G_{\mu\nu}^{(0,k)} [h^{(1,k)}] = 8\pi T_{\mu\nu}^{(1,k)} [J_0^\alpha], \quad (3.212a)$$

$$\delta G_{\mu\nu}^{(0,k)} [h^{(2,k)}] = 8\pi T_{\mu\nu}^{(2,k)} [J_0^\alpha, J_1^\alpha] - \delta^2 G_{\mu\nu}^{(0,k)} [h^{(1,k')}] - \delta G_{\mu\nu}^{(1,k)} [h^{(1,k)}], \quad (3.212b)$$

其中  $\delta^2 G_{\mu\nu}$  里的  $k'$  表示它是由两个  $h$  组合而出。上标中的“0”表示，当我们对某一个  $k_\alpha$  阶模式做进行操作时，我们忽略所有  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  的依赖。例如(3.203)式的定义中， $\tilde{\square}$  的操作需要对  $t$  求偏导，这意味着

$$\frac{\partial}{\partial t} h_{\mu\nu}^{(1,k)}(x^i, \tilde{t}) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} h_{\mu\nu}^{(1,k)}(x^i, \tilde{t}) = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.213)$$

的项将被忽略，而根据(3.207)式，

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-ik_\alpha \phi^\alpha} = -ik_\alpha \frac{d\phi^\alpha}{dt} e^{-ik_\alpha \phi^\alpha} = -ik_\alpha \Omega_0^\alpha [J_0(\tilde{t})] e^{-ik_\alpha \phi^\alpha} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.214)$$

的领头阶将被保留。通过解方程(3.212)，我们可以得到守恒量以及背景时空的  $M$  和  $J$  在慢时标  $\tilde{t}$  下的演化

$$\frac{dJ_0^\alpha}{d\tilde{t}} = \sum_k F_1^\alpha [h^{(1,k)}], \quad (3.215a)$$

$$\frac{dJ_1^\alpha}{d\tilde{t}} = \sum_k F_2^\alpha [h^{(2,k)}, h^{(1,k')}] , \quad (3.215b)$$

$$\frac{d\delta M}{d\tilde{t}} = \text{GW energy flux into the SMBH}, \quad (3.215c)$$

$$\frac{d\delta J}{d\tilde{t}} = \text{GW angular momentum flux into the SMBH}. \quad (3.215d)$$

这样，我们就知道了(3.210a)式小黑洞轨迹  $z^\alpha$  的演化。将  $z^\alpha$  带入背景时空  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  的测地线方程，通过与(3.162)式进行逐阶匹配，我们就可以得到 self-force 的表达式。形式化地看， $f_1^\mu$  可以通过  $F_1^\mu$  构造得到， $f_2^\mu$  可以通过  $F_1^\mu$  和  $F_2^\mu$  构造得到。最后，通过(3.208)式，我们可以从  $J_0^\alpha(\tilde{t})$  和  $J_1^\alpha(\tilde{t})$  的慢演化中积分得到轨道相位  $\phi^\alpha(t)$  在整个辐射时标内的积累。

## 3.2 Adiabatic 近似与密切 (qiē) 测地线

### 3.2.1 Adiabatic 近似的基本思想

整个3.1小节介绍的是系统性计算 self-force 的方法，涉及只有抽象的符号运算。具体的 self-force 计算实际上非常困难。但为了计算 EMRI 轨道的演化，人们提出一种基于守恒律的近似方法：引力辐射带走的能量，角动量和 Carter 常数就是小黑洞损失的轨道能量，角动量和 Carter 常数。这一近似被证明能够很好地描述(3.208)领头阶 [149]，也就是 adiabatic 阶的轨道演化，因此也被称为 adiabatic 近似。

下面展示的是 adiabatic 近似的主要思想：

1. 选择一组轨道常数  $(\mathcal{E}, \mathcal{L}_z, \mathcal{Q})$ ;
2. 计算沿着组轨道常数所决定的测地线(3.10)运动的点粒子的无演化引力波(3.159);
3. 计算引力波传播到无穷远处的  $\dot{\mathcal{E}}^\infty$ ,  $\dot{\mathcal{L}}_z^\infty$ ,  $\dot{\mathcal{Q}}^\infty$  和传播到视界处的  $\dot{\mathcal{E}}^H$ ,  $\dot{\mathcal{L}}_z^H$ ,  $\dot{\mathcal{Q}}^H$ ;
4. 施加 balance law:  $\dot{\mathcal{E}}^{\text{orbit}} = -\dot{\mathcal{E}}^\infty - \dot{\mathcal{E}}^H$ ,  $\dot{\mathcal{L}}_z^{\text{orbit}} = -\dot{\mathcal{L}}_z^\infty - \dot{\mathcal{L}}_z^H$ ,  $\dot{\mathcal{Q}}^{\text{orbit}} = -\dot{\mathcal{Q}}^\infty - \dot{\mathcal{Q}}^H$ ;
5. 更新轨道常数  $\mathcal{E}^{\text{new}} = \mathcal{E}^{\text{old}} + \dot{\mathcal{E}}\Delta\tilde{t}$ ,  $\mathcal{L}_z^{\text{new}} = \mathcal{L}_z^{\text{old}} + \dot{\mathcal{L}}_z\Delta\tilde{t}$ ,  $\mathcal{Q}^{\text{new}} = \mathcal{Q}^{\text{old}} + \dot{\mathcal{Q}}\Delta\tilde{t}$ ;
6. 重复上述过程, 直至得到整个 inspiral 过程的演化 (一般以小黑洞演化到 ISCO 结束);
7. 提取出积累的相位  $(\phi^r, \phi^\theta, \phi^\varphi)$ 。

上述步骤中, 最关键的就是计算出  $(\dot{\mathcal{E}}, \dot{\mathcal{L}}_z, \dot{\mathcal{Q}})$  的表达式。对于引起微扰的任意 (并不局限于点粒子) 能动张量  $T^{\alpha\beta}$ , 其在某一时空区域  $d\Sigma_\alpha$  内包含的能量为

$$dE = -T^\alpha{}_\beta \xi_{(t)}^\beta d\Sigma_\alpha = -T^\alpha{}_t d\Sigma_\alpha = -T^\alpha{}_t n_\alpha \sqrt{-\tilde{g}} dt d\theta d\varphi. \quad (3.216)$$

若想得到  $r$  方向的能流, 则取  $r = \text{const}$  的超曲面, 在无穷远处(2.130b)定义的标架满足  $n_\alpha = \delta_{r\alpha}$ , 于是

$$dE = -\Sigma T^r{}_t dt \sin\theta d\theta d\varphi = -\Sigma T_{rt} \tilde{g}^{rr} dt d\Omega = -\Delta T_{tr} dt d\Omega. \quad (3.217)$$

由此得到  $r$  方向的能流

$$\dot{E} = -\Delta \int T_{tr} d\Omega. \quad (3.218)$$

同理, 通过另一个 Killing 矢量, 我们可以得到  $r$  方向的角动量

$$dL_z = T^\alpha{}_\beta \xi_{(\varphi)}^\beta d\Sigma_\alpha = T^r{}_\varphi d\Sigma_r. \quad (3.219)$$

于是得到角动量流

$$\dot{L}_z = \Delta \int T_{r\varphi} d\Omega. \quad (3.220)$$

Carter 常数流无法单独从能动张量  $T^{\alpha\beta}$  中构造, 因为 Killing 张量  $K_{\mu\nu}$  有两个指标 (表达式见(3.5)式), 需要 4 速度  $u^\mu$  参与指标收缩, 即我们需要从 self-force 中提取出沿着测地线的 Carter 常数。基于 Mino 计算 self-force 轨道演化时提出的: 度规微扰的辐射 (radiative) 部分可以表示成 Green 函数的半推迟 (retarded) 部分减去半超前 (advanced) 部分 [135,150], 即

$$h_{\mu\nu}^{\text{rad}} = \frac{1}{2} (h_{\mu\nu}^{\text{rat}} - h_{\mu\nu}^{\text{adv}}). \quad (3.221)$$

Carter 常数在 Adiabatic 阶的演化  $\dot{Q}$  最早由 Sago 等人得到 [151]。由于推导过程需要用到 1SF, 并不符合本小节讨论的初衷: 在不计算 self-force 的前提下得到 adiabatic 阶的轨道演化。因此接下来的推导将只涉及  $\dot{\mathcal{E}}$  和  $\dot{\mathcal{L}}_z$ , 而直接将结果推广到  $\dot{Q}$ 。对  $\dot{Q}$  的具体推导感兴趣的读者可以参考 [151]。

接下来的任务就是计算度规微扰  $h_{\mu\nu}$  的能动张量  $T_{\mu\nu}$ 。由(3.192b)可知, EFT 可以逐阶的构造, 即在无物质源时

$$\delta G_{\mu\nu}[\mathbf{h}^{(2)}] = -\delta^2 G_{\mu\nu}[\mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(1)}] + \mathcal{O}(h^3). \quad (3.222)$$

从上式可知, 一阶度规微扰的等效能动张量定义为

$$8\pi T_{\mu\nu}^{\text{GW}}[\mathbf{h}^{(1)}] = -\delta^2 G_{\mu\nu}[\mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(1)}] + \mathcal{O}(h^3). \quad (3.223)$$

而  $h_{\mu\nu}^{(1)}$  源自(3.192a)的一阶物质扰动  $T_{\mu\nu}^{(1)}$ 。

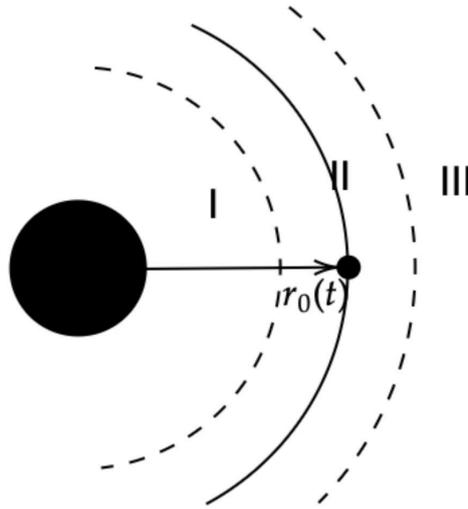


图 3.5 黑洞微扰绘景下从内向外的三个区域 I, II, III 示意图, 其中  $r_0(t)$  为小黑洞的  $r$  方向世界线。

如图3.5所示, 黑洞微扰论中“微扰”的生效其实是有一定条件的, 我们之所以能把实际度规写为(3.161)的展开是基于  $h_{\mu\nu} \ll \tilde{g}_{\mu\nu}$  的假设。但在图3.5的 II 区域, 尤其是在离小黑洞非常近的地方  $h_{\mu\nu} \gg \tilde{g}_{\mu\nu}$ , 微扰论彻底失效。在 I 和 III 区域, 微扰论是有效的。因此我们可以定性分析在 I 和 III 区域中, 度规微扰的起源:

1. 在 I 区域中, 我们测量到内部包含的质量  $M$  和角动量  $J = aM$  全部来自大黑洞。一阶度规微扰  $h_{\mu\nu}^{(1)}$  的效应是在慢时标  $\tilde{t}$  尺度下向大黑洞输送能量 (即质量)  $\delta M$  和角动量  $\delta J$ ;
2. 在 III 区域中,  $h_{\mu\nu}^{(1)}$  不仅包括大黑洞能量, 角动量的改变, 还包括小黑洞自己的能量, 角动量的改变, 这些改变的领头阶效应完全来自轨道能量  $E$  和轨道角动量  $L_z$ 。

综上，我们得到

$$h_{\mu\nu}^{(1)}(x^i, \tilde{t}) \sim \begin{cases} \frac{\delta M(\tilde{t})}{r} + \frac{\delta J(\tilde{t})}{r^2}, & r \in \Sigma_{\text{I}} \\ \frac{\delta M(\tilde{t})}{r} + \frac{\delta J(\tilde{t})}{r^2} + \frac{E(\tilde{t})}{r} + \frac{L_z(\tilde{t})}{r^2}, & r \in \Sigma_{\text{III}} \end{cases}. \quad (3.224)$$

使用双时标展开的视角，即无源情形下的(3.212b)式

$$\delta G_{\mu\nu}^{(0,k)} [h^{(2,k)}] = -\delta^2 G_{\mu\nu}^{(0,k)} [h^{(1,k')}] - \delta G_{\mu\nu}^{(1,k)} [h^{(1,k)}]. \quad (3.225)$$

小黑洞的运动产生的引力波带走的能流，角动量流，以及 Carter 常数流可以通过对上式求长时间的平均得到，即

$$\langle \delta G_{\mu\nu}^{(0,k)} [h^{(2,k)}] \rangle = -\langle \delta^2 G_{\mu\nu}^{(0,k)} [h^{(1,k')}] \rangle - \langle \delta G_{\mu\nu}^{(1,k)} [h^{(1,k)}] \rangle, \quad (3.226)$$

其中  $\langle \dots \rangle$  的定义与(3.33)式相同。但由于在短时标  $t$  下，我们可以近似地认为小黑洞的运行路径是  $(\mathcal{E}(t), \mathcal{L}_z(t), \mathcal{Q}(t))$  这组轨道常数下的测地线，因此我们可以通过求轨道平均代替(3.33)式的无限长时间平均。在本章的1.2.3小节，我们推导了  $t(\lambda), r(\lambda), \theta(\lambda), \varphi(\lambda)$  的解析表达式，由于  $t, \varphi$  两个方向的测地线方程均可以用  $r, \theta$  表示，即  $t[r(\lambda), \theta(\lambda)], r(\lambda), \theta(\lambda), \varphi[r(\lambda), \theta(\lambda)]$ ，因此只需要考虑对  $\phi_r$  和  $\phi_\theta$  的积分即可，正如计算无演化波形时需要计算的(3.153)这个二重积分。由于在(3.211)式的 Fourier 分解中，我们将所有关于相位  $\phi_r, \phi_\theta$  的依赖全部转移到了指数上，因此积分

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\phi_r \int_0^{2\pi} d\phi_\theta \bullet e^{-i(k^r \phi_r + k^\theta \phi_\theta)} = \bullet \delta_{0k^r} \delta_{0k^\theta}. \quad (3.227)$$

也就是说，(3.226)的平均操作只能提取出  $k = 0$  非震荡部分，而抹去了所有震荡项的贡献。于是(3.226)化为

$$\delta G_{\mu\nu}^{(0,0)} [h^{(2,0)}] = -\delta^2 G_{\mu\nu}^{(0,0)} [h^{(1,k')}] - \delta G_{\mu\nu}^{(1,0)} [h^{(1,0)}]. \quad (3.228)$$

这里 Einstein 张量的一次扰动项中的振荡因子直接来自度规微扰  $h^{(n,k)}$ ，因此内外均均为零。而二次扰动的振荡因子是两个  $h^{(1,k_1)}$  和  $h^{(1,k_2)}$  的组合，如果它们的相位因子刚好相反，则可以通过  $he^{+ik_\alpha \phi^\alpha} \cdot he^{-ik_\alpha \phi^\alpha} \sim h^2$  得到非震荡项。因此二次扰动的内部不能直接令  $k' = 0$ 。在介绍(3.212)式时，我们已经说明了上标  $(0, k)$  中的“0”表示忽略(3.213)度规微扰中随时间演化的部分，但保留(3.214)相位演化的领头阶。当  $k = 0$  时，(3.214)也会被尽数忽略。同理，上标  $(1, k)$  表示允许度规微扰的领头阶演化，但  $k = 0$  时依然不存在相位的演化。综上分析，我们可以将(3.228)式化为

$$0 = -\sum_{k_\alpha} \delta^2 G_{\mu\nu}^{(0,0)} \left[ |h^{(1,k_\alpha)}|^2 \right] - \delta G_{\mu\nu}^{(1,0)} [h^{(1,0)}], \quad (3.229)$$

其中

$$\delta G_{\mu\nu}^{(1,0)} [h^{(1,0)}] \sim \frac{\delta \dot{M}}{r} + \frac{\delta \dot{J}}{r^2} + \frac{\dot{E}}{r} + \frac{\dot{L}_z}{r^2}, \quad (3.230a)$$

$$\sum_{k_\alpha} \delta^2 G_{\mu\nu}^{(0,0)} \left[ |h^{(1,k_\alpha)}|^2 \right] = -8\pi T_{\mu\nu}^{\text{GW}}. \quad (3.230b)$$

### 3.2.2 无穷远处与视界处 $\dot{\mathcal{E}}$ , $\dot{\mathcal{L}}_z$ , $\dot{\mathcal{Q}}$ 的计算

从(3.230b)出发, 通过取  $r \rightarrow \infty$  或  $r \rightarrow r_+$ , 我们就可以得到引力波在无穷远处和视界处的表达式。但实际上, 我们可以通过 Teukolsky 方程本身的性质帮助化简部分计算。在本章第2节中, 我们已经推导了无轨道演化的引力波在无穷远处的渐进行为, 即(3.159)式。由于无穷远处的时空是渐进平直的, 我们可以使用平直时空背景下引力波能动张量, 而非弯曲时空中(3.230b)这样一个高度形式化的表达式。在 TT 规范下, 引力波的能动张量可以写成

$$T_{\alpha\beta}^{\text{GW}} = \frac{1}{32\pi} \left\langle \frac{\partial h_{\text{TT}}^{ij}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial h_{ij}^{\text{TT}}}{\partial x^\beta} \right\rangle = \frac{1}{16\pi} \left\langle \frac{\partial h_+}{\partial x^\alpha} \frac{\partial h_+}{\partial x^\beta} + \frac{\partial h_\times}{\partial x^\alpha} \frac{\partial h_\times}{\partial x^\beta} \right\rangle. \quad (3.231)$$

这里的  $\langle \dots \rangle$  仍是长时间的平均, 对于引力波来说是几个波长的平均。由(3.218)和(3.220)可知, 我们需要  $T_{tr}^{\text{GW}}$  和  $T_{t\varphi}^{\text{GW}}$ 。以  $T_{tr}^{\text{GW}}$  为例, 将(3.159)分别对  $t$  和  $r$  求偏导得

$$\frac{\partial h_+}{\partial t} - i \frac{\partial h_\times}{\partial t} = \frac{2i\mu}{r} \sum_{lmkn} \frac{Z_{lmkn}}{\omega_{mkn}} \frac{S_{lmkn}(\theta)}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega_{mkn}(t-r_*)+im\varphi}, \quad (3.232a)$$

$$\frac{\partial h_+}{\partial r} - i \frac{\partial h_\times}{\partial r} = -\frac{2i\mu}{r} \sum_{lmkn} \frac{Z_{lmkn}}{\omega_{mkn}} \frac{S_{lmkn}(\theta)}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega_{mkn}(t-r_*)+im\varphi} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (3.232b)$$

将(3.232b)取复共轭并与(3.232a)相乘得 (这里先使用了 SWSH 的正交关系)

$$\frac{\partial h_+}{\partial t} \frac{\partial \bar{h}_+}{\partial r} + \frac{\partial h_\times}{\partial t} \frac{\partial \bar{h}_\times}{\partial r} - i \frac{\partial h_\times}{\partial t} \frac{\partial \bar{h}_+}{\partial r} + i \frac{\partial h_+}{\partial t} \frac{\partial \bar{h}_\times}{\partial r} = -\frac{4\mu^2}{r^2} \sum_{lmkn} \frac{|Z_{lmkn}|^2}{\omega_{mkn}^2} \frac{|S_{lmkn}(\theta)|^2}{2\pi}. \quad (3.233)$$

在施加长时间平均后即得

$$T_{tr}^{\text{GW}} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\mu^2}{r^2} \sum_{lmkn} \frac{|Z_{lmkn}|^2}{\omega_{mkn}^2} |S_{lmkn}(\theta)|^2. \quad (3.234)$$

代入(3.218)的积分, 并由  $\Delta(r \rightarrow \infty) = r^2$  和 SWSH 的归一关系可得

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle^\infty = \mu^2 \left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\bar{t}} \right\rangle^\infty = \sum_{lmkn} \frac{\mu^2}{4\pi\omega_{mkn}^2} |Z_{lmkn}|^2. \quad (3.235)$$

最终, 我们得到了在慢时标下, 无穷远处, 单位质量小黑洞辐射的能流

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\bar{t}} \right\rangle^\infty = \sum_{lmkn} \frac{1}{4\pi\omega_{mkn}^2} |Z_{lmkn}^\infty|^2, \quad (3.236)$$

这里给振幅  $Z_{lmkn}$  添加了上标  $\infty$ ，代表无穷远处的能流。这是为了与之后推导的视界处振幅  $Z_{lmkn}^H$  相区分，我们将看到  $Z_{lmkn}^\infty$  对应  $R_{lmkn}^{\text{in}}(r)$  的结果， $Z_{lmkn}^H$  对应  $R_{lmkn}^{\text{up}}(r)$  的结果。回顾推导过程，将(3.232b)中对  $r$  的积分替换为对  $\varphi$  的积分，我们很容易得到

$$\left\langle \frac{d\mathcal{L}_z}{d\tilde{t}} \right\rangle^\infty = \sum_{lmkn} \frac{m}{4\pi\omega_{mkn}^3} |Z_{lmkn}^\infty|^2. \quad (3.237)$$

在(3.221)式处已经说明，Carter 常数流的推导需要用到 1SF 的结果，因此直接给出结果

$$\left\langle \frac{d\mathcal{Q}}{d\tilde{t}} \right\rangle^\infty = \sum_{lmkn} |Z_{lmkn}^\infty|^2 \times \frac{(\mathcal{L}_{mkn} + k\Upsilon_\theta)}{2\pi\omega_{mkn}^3}, \quad (3.238)$$

其中  $\Upsilon_\theta$  为  $\theta$  方向的 Mino 频率(3.41)，

$$\mathcal{L}_{mkn} = m\langle \cot^2 \theta \rangle \mathcal{L}_z - a^2\omega_{mkn}\langle \cos^2 \theta \rangle \mathcal{E}, \quad (3.239)$$

此处的  $\langle \dots \rangle$  定义为

$$\langle f_\theta(\theta) \rangle = \frac{1}{\Lambda_\theta} \int_0^{\Lambda_\theta} f_\theta[\theta(\lambda)] d\lambda. \quad (3.240)$$

接下来，我们需要计算视界处三种流的表达式。它们似乎不能通过(3.159)的波形直接得到，因为(3.159)式是无穷远处的波形。但幸运的是，Starobinsky 和 Churilov 在 1973 年研究超散射 (superradiant scattering) 时推导了电磁波 ( $s = 1$ ) 在  $r \rightarrow \infty$  和  $r \rightarrow r_+$  处的行为，得到了十分简洁的转换关系 [152]。随后 Teukolsky 和 Press 进一步推广了这个工作，得到了角向函数 SWSH 和径向函数  $R$  进行  $s \leftrightarrow -s$  转换时满足的恒等式 [153]。这个恒等式被称为 Teukolsky-Starobinsky 恒等式。下面展示的是  $s = \pm 2$  情形的恒等式

$$\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 {}_2S_{lm}^{a\omega}(\theta) = (C - 12iM\omega) {}_2S_{lm}^{a\omega}(\theta), \quad (3.241a)$$

$$\mathcal{L}_{-1}^\dagger\mathcal{L}_0^\dagger\mathcal{L}_1^\dagger\mathcal{L}_2^\dagger {}_2S_{lm}^{a\omega}(\theta) = (C - 12iM\omega) {}_2S_{lm}^{a\omega}(\theta), \quad (3.241b)$$

$$\mathcal{D}\mathcal{D}\mathcal{D}\mathcal{D} {}_2R_{lm\omega}(r) = \frac{1}{4}C {}_2R_{lm\omega}(r), \quad (3.241c)$$

$$\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}^\dagger \Delta^2 {}_2R_{lm\omega}(r) = 4\bar{C}\Delta^{-2} {}_2R_{lm\omega}(r), \quad (3.241d)$$

其中  $\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n^\dagger, \mathcal{D}, \mathcal{D}^\dagger$  就是定义在(3.126)式的微分算符。其中最关键的就是系数  $C$ ，它被称为 Starobinsky 常数。通过将(3.241c)和(3.241d)代入径向齐次 Teukolsky 方程(2.149)，可以得到

$$|C|^2 = [(\lambda + 2)^2 + 4a\omega - 4a^2\omega^2] (\lambda^2 + 36ma\omega - 36a^2\omega^2) + (2\lambda + 3) (96a^2\omega^2 - 48ma\omega) + 144\omega^2 (M^2 - a^2). \quad (3.242)$$

由于  ${}_2S_{lm}^{a\omega}(\theta)$  是实函数，因此从(3.241a)和(3.241b)可得

$$\text{Im } C = 12M\omega. \quad (3.243)$$

通过与  $a = 0$  时的结果对比可知，实部为

$$\operatorname{Re} C = +\sqrt{|C|^2 - (\operatorname{Im} C)^2} = \sqrt{|C|^2 - 144M^2\omega^2}. \quad (3.244)$$

由齐次 Teukolsky 方程的渐进行为(2.195)可知，视界处的纯入射波由  ${}_sR_{lm\omega}^{\text{up}}$  描述，对于  $s = \pm 2$  分别有

$${}_2R_{lm\omega}^{\text{up}} \sim {}_2R^H \Delta^{-2} e^{-ipr^*}, \quad (3.245a)$$

$${}_{-2}R_{lm\omega}^{\text{up}} \sim {}_{-2}R^H \Delta^2 e^{-ipr^*}. \quad (3.245b)$$

将它们代入(3.241c)得

$$C {}_2R^H = 64(2Mr_+)^4 ip (p^2 + 4\epsilon^2) (4\epsilon - ip) {}_{-2}R^H, \quad (3.246)$$

其中  $p = \omega - am/2Mr_+$  已经在(2.192)式处定义， $\epsilon = \sqrt{M^2 - a^2}/4Mr_+$  注意与质量比  $\epsilon$  进行区分。除此之外，Hawking 和 Hartle 在 1972 年的工作推导视界处的内行引力辐射 ( $s = 2$ ) 的能流和角动量流 [154]，其中用到了 Kerr 黑洞面积的演化  $\delta A(\tilde{t})$  同时度量了由于(3.224)引力波被黑洞吸收而导致的(3.215c)的质量演化  $\delta M(\tilde{t})$  和(3.215d)的角动量演化  $\delta J(\tilde{t})$ 。最终，通过计算  ${}_2R_{lm\omega}^{\text{up}}(r \rightarrow r_+)$  的能流和角动量流再用(3.246)式转化为  ${}_{-2}R_{lm\omega}^{\text{up}}(r \rightarrow r_+)$  对应的能流和角动量流得到

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\tilde{t}} \right\rangle^H = \sum_{lmkn} \frac{\alpha_{lmkn}}{4\pi\omega_{mkn}^2} |Z_{lmkn}^H|^2, \quad (3.247a)$$

$$\left\langle \frac{d\mathcal{L}_z}{d\tilde{t}} \right\rangle^H = \sum_{lmkn} \frac{m\alpha_{lmkn}}{4\pi\omega_{mkn}^3} |Z_{lmkn}^H|^2, \quad (3.247b)$$

$$\left\langle \frac{d\mathcal{Q}}{d\tilde{t}} \right\rangle^H = \sum_{lmkn} \alpha_{lmkn} |Z_{lmkn}^H|^2 \times \frac{(\mathcal{L}_{mkn} + k\Upsilon_\theta)}{2\pi\omega_{mkn}^3}, \quad (3.247c)$$

其中  $Z_{lmkn}^H$  仅仅是将  $Z_{lmkn}^\infty$  中的  ${}_{-2}R_{lm\omega}^{\text{in}}(r)$  替换为  ${}_{-2}R_{lm\omega}^{\text{up}}(r)$  得到，

$$\alpha_{lmkn} = \frac{256(2Mr_+)^5 p_{mkn} (p_{mkn}^2 + 4\epsilon^2) (p_{mkn}^2 + 16\epsilon^2) \omega_{mkn}^3}{|C_{lmkn}|^2}, \quad (3.248)$$

其中  $p_{mkn}$  和  $C_{lmkn}$  均通过  $\lambda \rightarrow \lambda_{lmkn}$  和  $\omega \rightarrow \omega_{mkn}$  的转化得到。注意  $\lambda_{lmkn} = {}_{-2}A_{lm\omega_{mkn}} + a^2\omega_{mkn}^2 - 2am\omega_{mkn}$  是方程(2.149)的分离变量常数。(3.247c)所表示的视界处 Carter 常数流使用的仍是 Sago 的结果 [151]。

### 3.2.3 密切测地线

在前面一小节中，我们介绍了通过引力波在算引力波传播到无穷远处的  $\dot{\mathcal{E}}^\infty$ ,  $\dot{\mathcal{L}}_z^\infty$ ,  $\dot{\mathcal{Q}}^\infty$  和视界处的  $\dot{\mathcal{E}}^H$ ,  $\dot{\mathcal{L}}_z^H$ ,  $\dot{\mathcal{Q}}^H$ 。之后通过 balance law:

$$\dot{\mathcal{C}}^{\text{orbot}} = -\dot{\mathcal{C}}^\infty - \dot{\mathcal{C}}^H, \quad \mathcal{C} \in [\mathcal{E}, \mathcal{L}_z, \mathcal{Q}], \quad (3.249)$$

再通过反向数值积分，我们就可以得到在慢时标下运动常数随时间的演化  $\mathcal{E}(\tilde{t}), \mathcal{L}_z(\tilde{t}), \mathcal{Q}(\tilde{t})$ 。

但是通过本章1节 Kerr 时空有质量粒子测地线的计算和2节测电线轨道的 EMRI 静态波形计算，我们可以看出：对于计算轨道和波形真正重要的是轨道参数  $(p, e, x_I = \cos \theta_{\text{pl}})$  而非运动常数  $\mathcal{C}$ 。所以要想得到波形，我们需要将  $\mathcal{E}(\tilde{t}), \mathcal{L}_z(\tilde{t}), \mathcal{Q}(\tilde{t})$  映射回  $p(\tilde{t}), e(\tilde{t}), x_I(\tilde{t})$ 。相比于前面的各种计算，这并非难事。从本章1.2.1节出发，我们可以推导出 Jacobi 矩阵：

$$\begin{pmatrix} J_{\mathcal{E}, r_a} & J_{\mathcal{L}_z, r_a} & J_{\mathcal{Q}, r_a} \\ J_{\mathcal{E}, r_p} & J_{\mathcal{L}_z, r_p} & J_{\mathcal{Q}, r_p} \\ J_{\mathcal{E}, x_I} & J_{\mathcal{L}_z, x_I} & J_{\mathcal{Q}, x_I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathcal{E}}^{\text{orbit}} \\ \dot{\mathcal{L}}_z^{\text{orbit}} \\ \dot{\mathcal{Q}}^{\text{orbit}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}_a \\ \dot{r}_p \\ \dot{x}_I \end{pmatrix}, \quad (3.250)$$

其中  $r_a = p/(1 - e)$  为远心点， $r_p = p/(1 + e)$  为近心点。这里不再展示(3.250)式 Jacobi 矩阵元的具体表达式，感兴趣的读者可以参考 Hughes 2021 的 Appendix B [26]。

前面已经提到，密切 (qiē) 测地线是指小黑洞的轨道时刻都沿该时刻下轨道参数  $p(\tilde{t}), e(\tilde{t}), x_I(\tilde{t})$  所决定的测地线，并在下一时刻平滑地过渡到下一时刻的测地线轨道。任意连续时刻的测地线轨道紧密相切，因此总的轨道相位是连续的，我们在快时标  $t$  下积分得到轨道相位

$$\Phi_{mkn}(t) = \int_{t_0}^t \omega_{mkn}(t') dt', \quad \omega_{mkn}(t') = m\Omega_\varphi(\tilde{t}') + k\Omega_\theta(\tilde{t}') + n\Omega_r(\tilde{t}'). \quad (3.251)$$

于是(3.159)的无演化波形可以平滑过渡到 adiabatic 近似下的演化波形

$$h_+(t) - ih_\times(t) = -\frac{2\mu}{r} \sum_{lmkn} \frac{Z_{lmkn}^\infty(t)}{[\omega_{mkn}(t)]^2} \frac{-2S_{lm}^{a\omega_{mkn}(t)}(\theta)}{\sqrt{2\pi}} e^{+im\varphi - \Phi_{mkn}(t)}. \quad (3.252)$$

依照惯例，我们展示一些结果：图3.6和图3.7展示的是 Scott Hughes 等人在 2021 年发表的文章中的结果 [26]。这篇文章是人类首次得到 Kerr 时空下任意轨道 ( $e \neq 0, x_I \neq 1$ ) 下的，使用纯相对论流得到的 adiabatic 近似下的波形。不同于在此之前的各种各样的“Kludge”波形，它使用的是(3.236), (3.237), (3.238)和(3.247)的完全由黑洞微扰论得到的流推出的轨道演化。这篇工作与 Drasco & Hughes 2006 [21] 一样具有代表意义，标志着我们终于完全走通了 adiabatic 阶轨道演化的计算。

对于 EMRI 波形来说，下一步是将计算向 1PA 阶推进。图3.8展示了 2023 年 LISA 波形工作组的最新进展 [95]。1PA 阶波形计算的难度飙升，不仅是因为数学复杂度的提升，还需要考虑更加精细的物理。如对于一个带有自旋角动量  $s^c$  的小黑洞，其 1SF 的完整表达式可以写为

$$\frac{D^2 z^\alpha}{d\tau^2} = -\frac{\varepsilon}{2} (\tilde{g}^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta) (2\tilde{\nabla}_\nu h_{\beta\mu}^{R,(1)} - \tilde{\nabla}_\beta h_{\mu\nu}^{R,(1)}) u^\mu u^\nu - \frac{\varepsilon}{2\mu} \tilde{R}^\alpha_{\beta\mu\nu} u^\beta S^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.253)$$

其中  $S^{\mu\nu} = \delta^\mu_a \delta^\nu_b \epsilon^{ab}_c s^c$ ，上标“R”代表 regular，是 self-force 计算时匹配渐进展开 (matched asymptotic expansions) 结果的非奇异部分。(3.253)式右侧的第一项就是 Mino, Sasaki, Tanaka

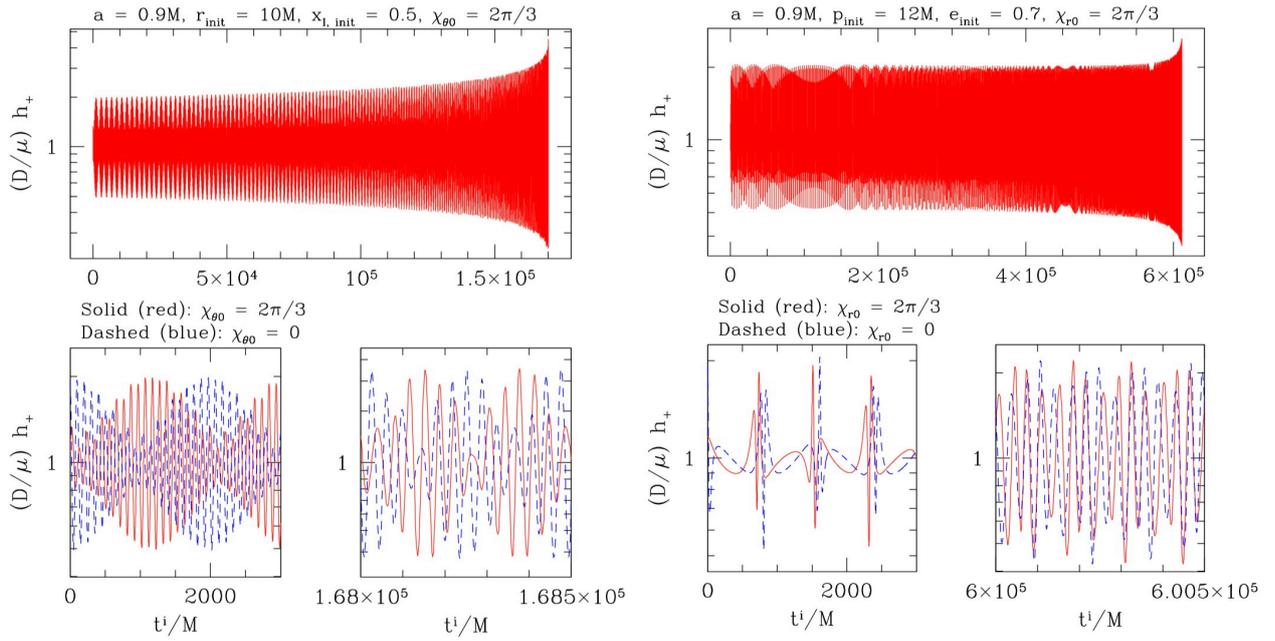


图 3.6 左图为初始参数设置  $(a, p_{\text{init}}, e_{\text{init}}, x_{I, \text{init}}) = (0.9M, 10M, 0, 0.5)$  下的波形；右图为初始参数设置  $(0.9M, 12M, 0.7, 1)$  下的波形。它们分别为 Hughes 2021 中图 13 和图 14 的一部分 [26]。

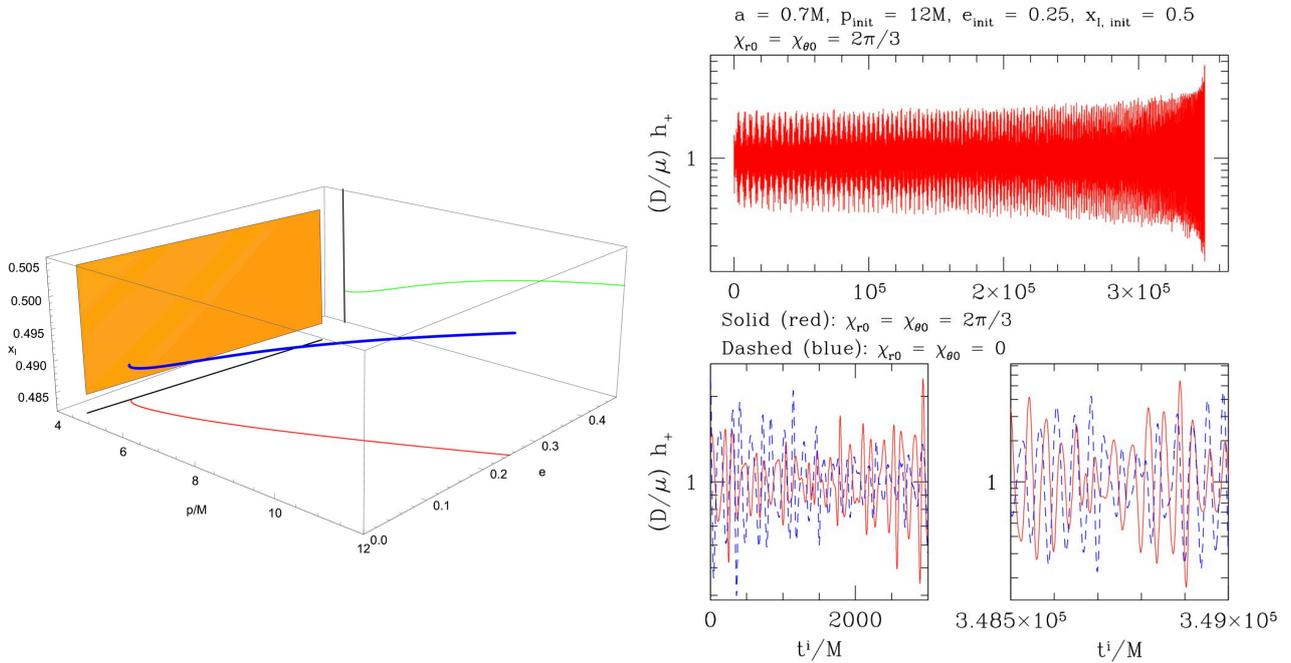


图 3.7 左图为初始参数设置  $(a, p_{\text{init}}, e_{\text{init}}, x_{I, \text{init}}) = (0.7M, 10M, 0.25, 0.5)$  下  $(p(t), e(t), x_I(t))$  的演化路径，最终位置  $(p_{\text{final}}, e_{\text{final}}, x_{I, \text{final}}) = (4.64M, 0.084, 0.488)$  为最内稳定轨道 (Last Stable Orbit, LSO)；右图为同一组参数和演化下的波形。它们是 Hughes 2021 中的图 15 和图 16 [26]。

Background Spacetime	Orbital Configuration	Adiabatic	Post-1-adiabatic			
		1SF (Dissipative)	1SF (Conservative)	2SF (Dissipative)	Spin Effects (Conservative)	Spin Effects (Dissipative)
Schwarzschild	Circular	✓✓✓	✓✓✓	✓✓✓	✓✓✓	✓✓✓
	Eccentric	✓✓✓	✓✓✓	X	✓✓, ✓✓✓*	✓, ✓✓*
Kerr	Circular	✓✓✓	✓✓	X	✓, ✓✓*	✓✓✓*
	Eccentric Equatorial	✓✓✓	✓✓	X	✓, ✓✓*	✓✓*
	Generic	✓✓✓	✓	X	✓	✓*
	Resonances	✓✓✓	✓	X	X	X

✓✓✓ Evolving Waveform    ✓✓ Driven Inspiral    ✓ Snapshot Calculation    \*(Anti-)Aligned Spin Only

图 3.8 LISA 波形工作组截止 2023 年的进展 [95]

以及 Quinn, Wald 于 1997 年推导的 1SF 公式 [139,140], 取他们五个人的姓氏前两个字母, 将只有第一项的公式命名为 MiSaTaQuWa 方程。正如前面提到的, adiabatic 阶的演化仅由 MiSaTaQuWa 力的辐射部分 (耗散部分) 决定(3.221), 剩下的守恒部分将贡献在 1PA 阶。(3.253)式右侧的第二项有着更悠久的历史, 它由 Mathisson 在 1937 年首先得到 [77,78], 后在 1952 年被 Papapetrou 重新推导 [79], Dixon 的后续发展和 Harte 的整理 [80–82]。只有第二项的公式被称为 Mathisson-Papapetrou-Dixon-Harte (MPD-Harte) 方程。MPD 项出现在 1SF 的表达式中, 但也表现为振荡效应, 贡献在 1PA 的相位修正中。除此之外, 还有更加难以计算的 2SF 阶 (的耗散部分), 至今 (2025 年) 人们还没有将 2SF 拓展到 Kerr 时空。但我们相信, 在 LISA 等空间引力波探测器正式运行之前, 这些问题都将被一个个攻克, 精准且快速的 EMRI 波形模版库将被建立。

## 第四章 b-EMRI 的波形计算

本章内容主要出自本人发表的文章：

**Yucheng Yin**, Josh Mathews, Alvin J. K. Chua, Xian Chen. Relativistic model of binary extreme-mass-ratio inspiral systems and their gravitational radiation. **PhysRevD.111.103007** [155]

以及学习相对论性坐标变换时整理的笔记。

### 1. 相对论性三体动力学与坐标变换

#### 1.1 b-EMRI 模型参数与外轨道设定

图4.1a展示了b-EMRI的物理图像。中心的超大质量黑洞是一个质量为  $M \sim 10^5 - 10^8 M_\odot$ 、自旋参数为  $a$  的 Kerr 黑洞。我们将 outer binary (OB) 的半通径记为  $p$ ，当轨道为圆形时即为外轨道半径。对于 inner binary (IB)，其两个恒星级质量黑洞的质量分别记为  $m_1$  和  $m_2$ 。我们使用  $\mu$  表示 IB 的总质量，即  $\mu \equiv m_1 + m_2 = M\varepsilon$ ，而  $m$  保留用于表示 SWSH 的磁量子数（整数）。为简化计算，假设  $m_1 = m_2$  且 IB 具有圆轨道，其轨道直径记为  $d$ 。

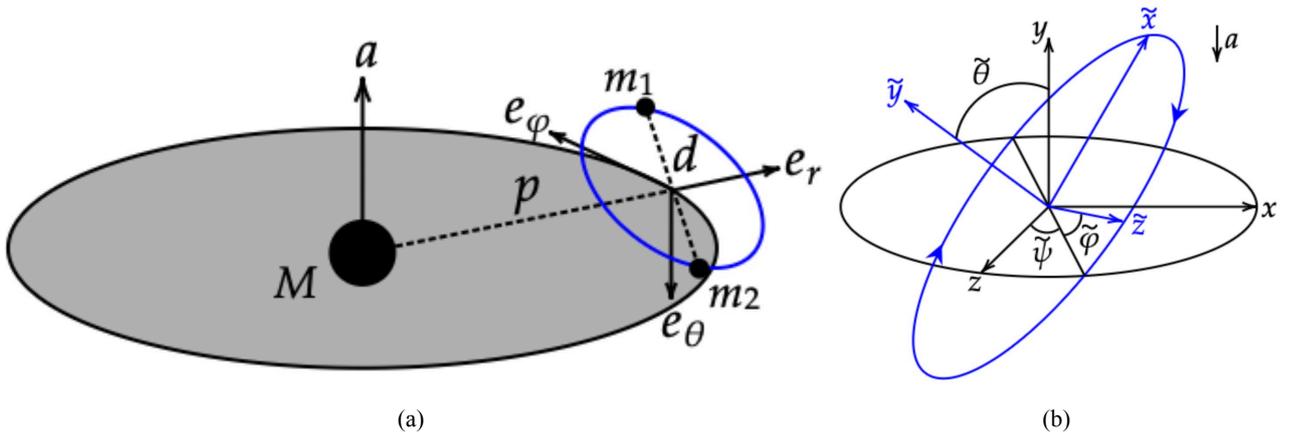


图 4.1 b-EMRI 系统及其参数示意图。图 (a) 展示了 b-EMRI 系统的整体结构，图 (b) 显示了 IB 轨道平面（蓝色）与 OB 轨道平面（黑色）之间的欧拉旋转。蓝色箭头指示小黑洞的运动方向。需注意图 (b) 中的  $y$  轴在几何上对准 BL 坐标系的  $e_\theta$  轴方向，对于赤道面 OB 轨道而言，该方向与超大质量黑洞自旋方向相反。

在下文中，我们将对两个恒星级黑洞的 IB 轨道运动采用牛顿轨道近似，这要求  $d$  相对于  $\mu$  必须足够大。然而若  $d$  过大，IB 会因希尔机制（Hill's mechanism）变得不稳定。关于  $d$  的

更精确约束将在第五章第2节给出，典型取值为  $d \approx$  几千  $\mu$ 。对于如此大的  $d$ ，需要相当小的  $\varepsilon$ （例如  $\varepsilon < 10^{-4}$ ）来维持系统稳定性。关于  $d$ 、 $\varepsilon$  和  $p$  的其他约束也将在第五章第2节详细讨论。

如图4.1b所示，决定 IB 轨道朝向的三个欧拉角将通过方程(4.4)体现其作用。图4.1b中 FFF 坐标系的  $y$  轴自然定义为与图4.1a中 BL 坐标系的  $e_\theta$  轴同向，因此在图4.1a视角中显示为向下。为便于讨论欧拉旋转，我们在图4.1b中将系统反转使超大质量黑洞自旋方向朝下。但  $x$  轴和  $z$  轴方向并不与  $e_r$ 、 $e_\varphi$  重合，而是存在进动角  $\Omega$  的差异。为描述该进动，我们定义了 LIF 坐标系。FFF、LIF 与 BL 坐标系间的转换关系将在下一小节完整阐述。从欧拉旋转角度看， $\tilde{\psi}$  是进动角， $\tilde{\varphi}$  是旋转角， $\tilde{\theta}$  是章动角。物理上  $\tilde{\theta}$  也表示内禀轨道角动量与外禀轨道角动量间的夹角。 $\tilde{\varphi}$  可被吸收进内轨道运动，导致其与内轨道圆周运动初始相位简并。因此我们将内轨道双星初始相位设为零以简化计算。此外， $\tilde{\psi}$  与 BL 坐标系中观测者方位角  $\varphi$  简并，基于相同原因设  $\tilde{\psi} = 0$ 。我们的 b-EMRI 模型共包含八个内秉参数，列于表4.1。

$M$	超大质量黑洞质量 $\sim 10^5 - 10^8 M_\odot$
$a$	黑洞自旋参数固定为 $0.9M$
$\varepsilon$	质量比 $\sim 10^{-6} - 10^{-4}$
$p$	外轨道半径（以 $M$ 为单位）
$d$	内轨道直径（以 $\mu = M\varepsilon$ 为单位）
$\tilde{\psi}$	进动角固定为 0
$\tilde{\theta}$	倾角范围 0 至 $\pi$
$\tilde{\varphi}$	旋转角范围 0 至 $2\pi$

表 4.1 本文 b-EMRI 模型关键参数，其中  $M$ 、 $a$ 、 $\varepsilon$ 、 $p$ 、 $d$  对应图 4.1a 所示参数， $\tilde{\psi}$ 、 $\tilde{\theta}$ 、 $\tilde{\varphi}$  对应图 4.1b 所示欧拉角

本工作中，我们假设 OB 的轨道遵循 Kerr 时空中的赤道面上的圆轨道。从(3.10)式可知，其 4 速度  $u^x = dx/d\tau$  ( $x = t, r, \theta, \varphi$ ) 的形式退化为：

$$u^t = \frac{\mathcal{E}}{p^2} \left[ \frac{(p^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \right] + \frac{a\mathcal{L}_z}{p^2} \left( 1 - \frac{p^2 + a^2}{\Delta} \right), \quad (4.1a)$$

$$u^r = 0 \quad (\text{其中 } r = p), \quad (4.1b)$$

$$u^\theta = 0 \quad (\text{其中 } \theta = \pi/2), \quad (4.1c)$$

$$u^\varphi = \frac{\mathcal{L}_z}{p^2} + \frac{a\mathcal{E}}{p^2} \left( \frac{p^2 + a^2}{\Delta} - 1 \right) - \frac{a^2\mathcal{L}_z}{p^2\Delta}. \quad (4.1d)$$

对于赤道圆轨道， $\mathcal{E}$  和  $\mathcal{L}_z$  可表示为

$$\mathcal{E} \equiv \frac{E}{\mu} = \frac{p^{3/2} - 2Mp^{1/2} \pm aM^{1/2}}{p^{3/4} (p^{3/2} - 3Mp^{1/2} \pm 2aM^{1/2})^{1/2}}, \quad (4.2a)$$

$$\mathcal{L}_z \equiv \frac{L_z}{\mu} = \frac{\pm M^{1/2}(p^2 \mp 2aM^{1/2}p^{1/2} + a^2)}{p^{3/4} (p^{3/2} - 3Mp^{1/2} \pm 2aM^{1/2})^{1/2}}, \quad (4.2b)$$

其中上符号对应顺行外轨道，下符号对应逆行外轨道。全文假设 OB 轨道为顺行。这些表达式可从 Kerr 测地线方程的  $r$  分量(3.10b)，通过令  $R(p) = 0$  和  $R' \equiv \partial_r R|_{r=p} = 0$  以及  $\mathcal{Q} = 0$  (对应赤道面圆轨道 OB 条件)，即可得到(4.2)式。

## 1.2 BL 坐标下的小黑洞轨迹

两个恒星级黑洞的相对运动在 IB 系统质心 (CM) 自由落体的参考系 (前述 FFF) 中最易求解。在该参考系中，根据 Einstein 等效原理，时空可视为足够平坦，因此两个黑洞遵循近开普勒轨道。结合先前对圆形 IB 轨道的假设，可计算 IB 轨道频率为  $\omega_{\text{IB}} = \sqrt{\mu/d^3}$ ，并将两个黑洞在其轨道平面内的坐标表示为

$$\tilde{x} = \frac{1}{2}d \cos(\omega_{\text{IB}}\tau), \quad (4.3a)$$

$$\tilde{y} = 0, \quad (4.3b)$$

$$\tilde{z} = \frac{1}{2}d \sin(\omega_{\text{IB}}\tau), \quad (4.3c)$$

其中  $\tau$  为 FFF 系的固有时，且假设内禀双星质量相等故圆周运动半径为  $d/2$ 。

为描述任意取向的 IB，采用欧拉旋转：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \tilde{\varphi} & 0 & \sin \tilde{\varphi} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \tilde{\varphi} & 0 & \cos \tilde{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \tilde{\theta} & -\sin \tilde{\theta} & 0 \\ \sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \tilde{\psi} & 0 & \sin \tilde{\psi} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \tilde{\psi} & 0 & \cos \tilde{\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

将 IB 轨道平面旋转至 FFF 系坐标。需注意  $\tilde{\varphi}$  的旋转可吸收为(4.3)式中的初始相位，该相位在(4.3)式中已设为零。

由于 Teukolsky 方程是在 BL 坐标系中推导的，我们需要将小黑洞的运动从 FFF 坐标系转换到 BL 坐标系。该转换通过两个步骤实现 [91, 156]。各坐标系间的关系如图4.2所示。

首先将内轨道运动转换到 LIF 系。该参考系与 FFF 系具有相同原点（即 IB 的质心）和  $u^t$ ，但其三个空间轴分别与 BL 坐标系的  $e_r$ 、 $e_\theta$  和  $e_\varphi$  轴对齐。因此，FFF 与 LIF 系的空间轴存在进动差异，其角频率为  $\Omega = -\sqrt{M/p^3}$  [156]，推导放在本节末尾的1.3小节的第 1 部分。在赤道面圆轨道 OB 的情形下，这恰好等于开普勒轨道频率。负号源于当  $e_y$  轴在赤道面与  $e_\theta$  轴

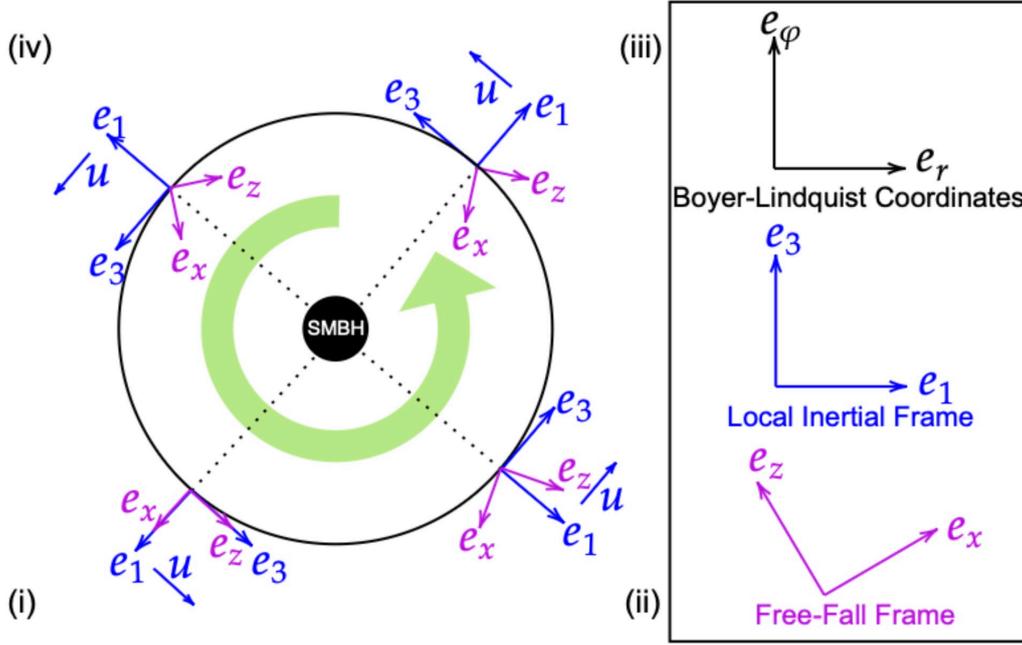


图 4.2 本文使用的不同参考系及其绕 SMBH 旋转时的相对取向。它是图 4.1a 的俯视图，其中  $e_1, e_2, e_3$  为 LIF 系的单位矢量，分别与 BL 坐标系的  $e_r, e_\theta, e_\phi$  对齐。FFF 与 LIF 系共享以 IB 质心为原点的坐标系，而 BL 坐标系的原点位于图中未显示的 SMBH 中心。

对齐时指向下方。因此两坐标系间的转换关系为旋转变换：

$$T = \tau, \quad (4.5a)$$

$$X^1 = x \cos(\Omega\tau) - z \sin(\Omega\tau), \quad (4.5b)$$

$$X^2 = y, \quad (4.5c)$$

$$X^3 = x \sin(\Omega\tau) + z \cos(\Omega\tau). \quad (4.5d)$$

由此，FFF 系的  $e_x$  和  $e_z$  轴将周期性（即图 4.2 中 (i) 时刻）与 LIF 系的  $e_1$  和  $e_3$  轴重合。对比图 4.2(i) 时刻与图 4.1a 可知，这些时刻  $\tilde{\psi} = 0$ 。我们可选择这些时刻作为参考点，使得初始进动信息包含在 IB 质心、SMBH 与观测者间的方位角  $\varphi$  中。因此，(4.4) 式中关于  $\tilde{\psi}$  的旋转退化为恒等变换。

其次，我们将 LIF 系中的坐标转换至 BL 坐标系。尽管在 LIF 系中每个恒星级黑洞与 IB 质心的距离是固定的（基于圆形内轨道的假设），但在 BL 坐标系中该距离会随时间变化，原因有二：(i) LIF 坐标由 IB 质心处的观测者测量，而 BL 坐标由无穷远观测者测量，两者存在坐标变换；(ii) 由于质心运动，坐标变换也随时间变化。需要强调的是，此前的研究尚未考虑这种质心距离的变化。

这种变化的距离通常可展开为无穷级数 [92]，但就我们的研究目的而言，保留  $X^{1,2,3}$  的

二阶项已足够。参考文献 [91], 单个小黑洞的轨迹可表示为:

$$t = t_0 + \frac{(\mathcal{M}\mathcal{M}_\varphi + \gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}\nu)X^3(\kappa_\varphi X^1 + 1)}{\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}\mathcal{M}/\gamma} + \frac{(\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2} + \mathcal{M}\mathcal{M}_\varphi\nu)(T - \Omega X^1 X^3)}{\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}\mathcal{M}/\gamma}, \quad (4.6a)$$

$$r = r_0 + \frac{2X^1 + \kappa_r(X^1)^2 - \kappa_\theta(X^2)^2 - \kappa_\varphi(X^3)^2}{2\gamma_{rr}^{1/2}}, \quad (4.6b)$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{\kappa_\theta X^1 X^2 + X^2}{\gamma_{\theta\theta}^{1/2}}, \quad (4.6c)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{X^3(\kappa_\varphi X^1 + 1) + \nu(T - \Omega X^1 X^3)}{\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}/\gamma}, \quad (4.6d)$$

其中  $\mathcal{M}$ 、 $\mathcal{M}_\varphi$ 、 $\gamma_{rr}^{1/2}$ 、 $\gamma_{\theta\theta}^{1/2}$ 、 $\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}$ 、 $\kappa_r$ 、 $\kappa_\theta$ 、 $\kappa_\varphi$ 、 $\nu$ 、 $\gamma$  均为  $M$ 、 $a$ 、 $p$  的函数, 具体表达式和推导位于本节最后 1.3 小节的第 2 部分。

根据(4.4)-(4.6)式, 每个小黑洞的 BL 坐标  $t$ 、 $r$ 、 $\theta$ 、 $\varphi$  可展开为  $d$  的级数。为保证 IB 稳定性 (第 2 节将讨论),  $d$  必须足够小。此时运动轨迹可表示为:

$$t = c_{00} + c_{01}d + c_{02}d^2 + \mathcal{O}(d^3), \quad (4.7a)$$

$$r = c_{10} + c_{11}d + c_{12}d^2 + \mathcal{O}(d^3), \quad (4.7b)$$

$$\theta = c_{20} + c_{21}d + c_{22}d^2 + \mathcal{O}(d^3), \quad (4.7c)$$

$$\varphi = c_{30} + c_{31}d + c_{32}d^2 + \mathcal{O}(d^3), \quad (4.7d)$$

其中零阶项  $c_{00}$ 、 $c_{10}$ 、 $c_{20}$  和  $c_{30}$  对应 OB 的赤道面圆轨道测地线:

$$c_{00} = u^t \tau, \quad (4.8a)$$

$$c_{10} = p, \quad (4.8b)$$

$$c_{20} = \pi/2, \quad (4.8c)$$

$$c_{30} = u^\varphi \tau. \quad (4.8d)$$

一阶和二阶系数  $c_{01}$ 、 $c_{02}$ 、 $c_{11}$ 、 $c_{12}$ 、 $c_{21}$ 、 $c_{22}$ 、 $c_{31}$ 、 $c_{32}$  的推导见 1.3 小节的第 3 部分。需特别注意的是, 这些系数均包含  $\omega_{\text{IB}} = \sqrt{\mu/d^3}$  项 (本身是  $d$  的函数)。我们选择在固定  $\omega_{\text{IB}}$  值下进行  $d$  的级数展开, 主要基于三点考虑: 首先, 这是处理内外轨道不同时空尺度时保证展开式收敛的最直接方法; 其次, 可避免对 IB 轨道相位振荡函数的不精确展开; 最后, 固定  $\omega_{\text{IB}}$  能规避通过离散频谱中  $\omega_{\text{IB}}$  的  $d$  依赖性对 Teukolsky 径向齐次解进行复杂展开的问题 (下节详述)。因此, 我们将  $\omega_{\text{IB}}$  作为独立参数预处理, 其演化速度远慢于外围轨道运动, 故可忽略。

上述展开揭示了小黑洞轨迹比其他已有的 b-EMRI 波形工作 [75, 83, 84] 中假设的简单内外运动叠加更为丰富的结构。这使我们能更精确计算每个小黑洞偏离测地线运动的程度, 进而求解扰动 Kerr 时空产生的引力波形。

### 1.3 坐标变换与轨迹系数的推导

#### 1.3.1 FFF→LIF 的 Schiff 进动 $\Omega$ (基于 Rindler & Perlick 1990 [156])

b-EMRI 系统中的 IB 可以看成是 Kerr 时空中沿某条测地线运动 (FFF) 的陀螺仪在测地线某一个位置关于该位置局域惯性系 (LIF) 的进动。LIF 中  $x^i = \text{const}$ ,  $t = \tau$ , 在 FFF 与 LIF 之间可以通过 Fermi-Walker 旋转变换实现。两个坐标系的坐标原点是重合的, 时间方向也是重合的, 只是空间上相差一个转动  $\Omega$ 。这一节的目的是为了求出  $\Omega$ , 因此我们首先要得到  $x^i = \text{const}$  的 LIF, 轴对称时空的一般度规表示为

$$ds^2 = -e^{2\psi}(dt - \omega_i dx^i)^2 + h_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.9)$$

其中  $\psi, \omega_i, h_{ij}$  都只是空间坐标  $x^i$  的函数, 如果我们做如下坐标变换

$$\begin{aligned} x'^i &= x'^i(x^1, x^2, x^3), \\ t' &= a[t + f(x^1, x^2, x^3)], \end{aligned} \quad (4.10)$$

则度规的形式保持不变

$$ds^2 = -e^{2\psi'}(dt' - \omega'_i dx'^i)^2 + h_{ij} dx'^i dx'^j, \quad (4.11)$$

其中

$$\begin{aligned} \psi' &= \psi - \ln a, \\ \omega'_i &= a(\omega_i + f_{,i}), \end{aligned} \quad (4.12)$$

可见  $\psi_{,i}, e^\psi \omega_{[i,j]}$  保持不变。因此总存在一组坐标变换使得  $\psi = 0, \omega_i = 0$  但是不影响空间线元  $h_{ij}$

$$dl^2 = h_{ij} dx^i dx^j. \quad (4.13)$$

我们想要研究刚体在弯曲时空中沿某个方向的旋转, 需要先定义一个投影算符, 其作用是将一个  $n$  维流形上的张量投影到其上的一个  $n-1$  维子流形上。在我们的例子中, 就是将四维时空中的坐标投影到纯空间的方向上, 从而可以定义弯曲时空中的旋转矩阵。这个投影张量是

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu. \quad (4.14)$$

它是一个对称张量, 可以验证将其与 4-速度缩并结果为 0, 所以它与四速度方向垂直, 也就是代表着 LIF 中的空间方向

$$h_{\mu\nu} u^\mu = g_{\mu\nu} u^\mu + u_\mu u^\mu u_\nu = u_\nu - u_\nu = 0. \quad (4.15)$$

这里用到  $u_\mu u^\mu = -1$  是因为我们研究的测地线是类时的。定义

$$h^\mu{}_\nu = g^{\mu\rho} h_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu + u^\mu u_\nu \quad (4.16)$$

为投影算符。对任意一个 4-矢量  $V^\mu$  做 Fermi 导数得到

$$\frac{D_F V^\mu}{d\tau} = \frac{D V^\mu}{d\tau} + (a^\mu u^\nu - u^\mu a^\nu) V_\nu. \quad (4.17)$$

在 FFF 中,  $a^\mu = 0$  因此 Fermi 导数退化到协变导数。更进一步, 如果  $V^\mu$  在沿着测地线运动过程中始终垂直于  $u^\mu$ , 则有

$$\frac{D_F V^\mu}{d\tau} = \left( \frac{D V^\mu}{d\tau} \right)_\perp, \quad (4.18)$$

其中

$$\left( \frac{D V^\mu}{d\tau} \right)_\perp = h^\mu{}_\nu \frac{D}{d\tau} V^\nu. \quad (4.19)$$

由于一个矢量  $V^\mu$  的投影  $V^\mu_\perp = h^\mu{}_\nu V^\nu$  只有空间分量, 因此我们按照惯例用拉丁字母表示  $ijk = 1, 2, 3$  于是(4.18)中的导数可以进一步写成一个普通导数

$$\frac{d}{d\tau} V^i = u^i{}_{;j} V^j. \quad (4.20)$$

由于这个方程是一个一阶线性常微分方程, 所以其解可以表示成其在某一时刻  $q$  的解的一个线性变换

$$V_i(\tau) = A_{ij}(\tau) V^j \Big|_q. \quad (4.21)$$

这个线性变换矩阵  $A_{ij}$  包含了方向和形状的信息, 因此它可以分解为

$$A_{ij} = \delta^{lm} O_{il} S_{mj}, \quad (4.22)$$

其中  $O_{ij}$  为一个正交矩阵, 包含了方向信息, 在  $q$  点退化为单位矩阵;  $S_{ij}$  为一个对称矩阵, 包含着相邻测地线之间距离信息, 在  $q$  点同样退化为单位矩阵。我们想要描述这个矢量场方向和大小的变化率, 通过线性代数的知识, 旋转矩阵 (正交矩阵) 的导数  $dO_{ij}/d\tau$  为反对称矩阵, 因此通过(4.20)式, 在  $q$  点附近的测地线方向变化率为  $u_{i;j}$  的反对称部分, 于是旋转矩阵可以定义为

$$\omega_{\mu\nu} = h_\mu{}^\rho h_\nu{}^\sigma u_{[\rho,\sigma]} = (\delta_\mu{}^\rho + u_\mu u^\rho)(\delta_\nu{}^\sigma + u_\nu u^\sigma) u_{[\rho,\sigma]}. \quad (4.23)$$

在我们关心的轴对称时空中  $u^\mu = e^{-\psi} \delta_0^\mu$ ,  $u_\mu = -e^\psi (\delta_\mu^0 - \omega_i \delta_\mu^i)$ , 因此其三维分量为

$$\omega_{kj} = e^\psi \omega_{[k,j]}. \quad (4.24)$$

它与三维旋转矢量  $\Omega^i$  之间的关系为

$$\omega_{kj} = \Omega^i \eta_{ijk}, \quad (4.25)$$

其中  $\eta_{ijk} = (\det h_{mn})^{1/2} \epsilon_{ijk}$  是 Levi-Civita 张量, 其逆为  $\eta^{ijk} = (\det h_{mn})^{-1/2} \epsilon^{ijk}$ , 因此可以得到

$$\Omega^i = e^\psi (\det h_{mn})^{-1/2} \epsilon^{ijk} \omega_{[k,j]} = \frac{1}{2} e^\psi (\det h_{mn})^{-1/2} \epsilon^{ijk} \omega_{k,j}. \quad (4.26)$$

对于 Kerr 时空, 在赤道面上  $\theta = \pi/2$ ,  $d\theta = 0$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{4aM}{r} dt d\varphi + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r}\right) d\varphi^2 + \left(1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (4.27)$$

为了方便我们得到 LIF, 我们可以选择转动坐标变换(4.10)

$$\varphi = \varphi' + \omega t. \quad (4.28)$$

变换后的 Kerr 度规为

$$ds^2 = - \left[1 - \omega^2(a^2 + r^2) - \frac{2M}{r}(1 - a\omega)^2\right] \times \left[dt - \frac{\omega(r^2 + a^2) - (2aM/r)(1 - a\omega)}{1 - \omega^2(r^2 + a^2) - (2M/r)(1 - a\omega)^2} d\varphi'\right]^2 + \frac{r^2 - 2Mr + a^2}{1 - \omega^2(r^2 + a^2) - (2M/r)(1 - a\omega)^2} d\varphi'^2 + \left(1 + a^2 r^{-2} - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (4.29)$$

对比(4.9)可得

$$e^{2\psi} = 1 - \omega^2(a^2 + r^2) - \frac{2M}{r}(1 - a\omega)^2, \quad (4.30)$$

$$\omega_1 = \omega_2 = 0,$$

$$\omega_3 = \frac{\omega(r^2 + a^2) - (2aM/r)(1 - a\omega)}{1 - \omega^2(r^2 + a^2) - (2M/r)(1 - a\omega)^2}.$$

为了最终使  $\psi$  保持不变, 一定有  $\psi_{,r} = 0$  即令  $e^{2\psi}$  的  $r$  偏导数为零, 得到

$$\omega = \left(a \pm \sqrt{\frac{r^3}{M}}\right)^{-1}. \quad (4.31)$$

将其带入得

$$e^\psi = \left(\pm 2a\sqrt{\frac{r^3}{M}} + \frac{r^3}{M} - 3r^2\right)^{1/2} \left(a \pm \sqrt{\frac{r^3}{M}}\right)^{-1},$$

$$\omega_{3,1} = 2 \left(a \pm \sqrt{\frac{r^3}{M}}\right) \left(r \pm \frac{Ma}{r^2} \sqrt{\frac{r^3}{M}}\right) \left(\pm 2a\sqrt{\frac{r^3}{M}} + \frac{r^3}{M} - 3r^2\right)^{-1}, \quad (4.32)$$

$$h^{11} = 1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2M}{r},$$

$$h^{33} \left(\pm 2\sqrt{\frac{r^3}{M}} + \frac{r^3}{M} - 3r^2\right) (r^2 - 2Mr + a^2)^{-1} \left(a \pm \sqrt{\frac{r^3}{M}}\right)^{-2}.$$

将它们带入(4.26)式得

$$\Omega = \pm \sqrt{\frac{M}{r^3}} \quad (4.33)$$

这个进动的大小正好就是 Kepler 轨道特征角速度的大小，这个进动最早由 Schiff 在 1960 年发现 [157]，因此被命名为 Schiff 进动。

### 1.3.2 LIF→BL 的 Fermi-Walker 移动

对于任意弯曲时空中做任意类时运动的观测者，有一类很自然的描述在观测者附近（远小于曲率半径）的范围内运动的参考系，这个参考系最早被 Fermi 提出 [158]，因此叫做 Fermi 参考系。它实际上是一类局域惯性系，其空间方向是一个笛卡尔坐标系，区别于其他局域惯性系的是在这个参考系中描述的运动在沿观测者世界线平行移动的时候是没有旋转的，但是其三个空间方向的坐标轴在随观测者沿其世界线做 Fermi-Walker 移动的时候，其方向是不断变化的。因此 Fermi 坐标系的时间方向与观测者 4-速度的方向一致，空间方向在是不断旋转的。这个旋转可以通过沿观测者世界线平移（做 Fermi-Walker 移动）的时候，沿三个坐标轴方向的陀螺仪的进动描述，也就是上一部分中的(4.26)式。Misner, Thorne 和 Wheeler 在他们的著作 Gravitation [159] 中推导了在观测者的 Fermi 坐标  $(X^A) = (T, X^i)$ ,  $(A = 0, 1, 2, 3, i = 1, 2, 3)$  中的时空度规的一阶展开

$$ds^2 = - \left[ 1 + 2A_i(T)X^i \right] dT^2 - 2\epsilon_{ijk}X^i\omega^j(T)dX^k dT + \delta_{ij}dX^i dX^j + \mathcal{O}(3). \quad (4.34)$$

由于它是一个展开式，因此其适用范围也仅仅是观测者附近的范围，也就是背景时空可以认为是平直时空的范围。观测者静止在  $X^i = 0$  的位置， $T$  是观测者的固有时间， $A_i(T)$  是观测者自身在背景时空中的加速度，如果观测者本身处于背景时空的测地线上则  $A_i \equiv 0$ ， $\omega^i(T)$  就是(4.26)式中的  $\Omega^i$ 。

当然这三个空间坐标轴  $X^i$  的方向一开始是人为取定的，只是其旋转的方式由 Fermi-Walker 移动过程中陀螺仪的进动描述。对于沿着时空 Killing 轨迹的观测者世界线而言，可以很自然地将空间轴方向取为沿着世界线被 Lie dragged 的方向（随着 Killing 轨迹一起滑动，保持同步的方向），如 Kerr 黑洞赤道面上圆轨道的观测者就可以将  $X^1, X^2, X^3$  对准  $r, \theta$  和 Lorentz boost 的  $\varphi$  方向。如果考虑最一般的 Killing 圆轨道，我们可以将加速度的方向与第一个空间轴的方向对齐  $A = A^1$ ，由于加速度的方向与角速度的方向垂直，所以可以将第二个空间轴的方向与角速度对齐  $\Omega = \omega^2$ ，于是度规变为

$$ds^2 = -(1 + 2AX^1)dT^2 + 2\Omega(X^3dX^1 - X^1dX^3)dT + \delta_{ij}dX^i dX^j + \mathcal{O}(3). \quad (4.35)$$

下面我们考虑背景时空为 Kerr 时空，为了得到一阶 Fermi 坐标下的度规，我们需要将坐标变换展开到二阶，这将引入 16 个一阶展开系数  $a^\alpha_B$  和  $4 \times 10$  个二阶展开系数  $b^\alpha_{BC}$

$$x^\alpha = x_0^\alpha + a^\alpha_B X^B + b^\alpha_{BC} X^B X^C + \mathcal{O}(3). \quad (4.36)$$

坐标变换的 Jacobi 矩阵为

$$J^\alpha_B = \frac{\partial x^\alpha}{\partial X^B} = a^\alpha_B + 2b^\alpha_{BC} X^C + \mathcal{O}(2). \quad (4.37)$$

它们需要满足 10 个方程

$$g_{AB} = g_{\alpha\beta} J^\alpha_A J^\beta_B = g_{\alpha\beta} a^\alpha_A a^\beta_B + 2g_{\alpha\beta} a^\alpha_A b^\beta_{BC} X^C + \mathcal{O}(2), \quad (4.38)$$

其中  $g_{\alpha\beta}$  是定义在(2.115)的 Kerr 度规。当我们选择合适的研究区域，离观测者足够近（观测者附近的时空足够平直），则  $\mathcal{O}(2)$  的项可以直接扔掉，于是这个方程对于 4 个  $X^C$  应该是分别成立的，因此这实际上是 40 个线性的方程，刚好可以限制 40 个二阶展开系数  $b^\beta_{BC}$ 。而一阶展开系数的处理更为简单，前面已经说了我们只需要将它们固定在与 Killing 轨迹上 Lie dragged 的方向即可，因此有  $a^\alpha_B = \delta^\alpha_B$ 。

首先考虑一个在 Kerr 时空中的赤道面上的静止观测者（想象它可能是一个火箭，沿径向向外飞，推力产生的 4 加速度使之恰好静止在该位置）。其线元可以写成

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{4aM}{r} dt d\varphi + \frac{r^2}{\Delta} dr^2 + r^2 d\theta^2 + \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2}{r^2} d\varphi^2 \\ &= - M^2 (dt^2 - M_\varphi d\varphi)^2 + \gamma_{rr} dr^2 + \gamma_{\theta\theta} d\theta^2 + \gamma_{\varphi\varphi} d\varphi^2, \end{aligned} \quad (4.39)$$

其中

$$M = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}, \quad M_\varphi = -\frac{2aM}{r - 2M}, \quad \gamma_{rr}^{1/2} = \frac{r}{\sqrt{\Delta}}, \quad \gamma_{\theta\theta}^{1/2} = r, \quad \gamma_{\varphi\varphi}^{1/2} = \sqrt{\frac{r\Delta}{r - 2M}}. \quad (4.40)$$

于是可以定义其 1-形式标架

$$\omega^{\hat{t}} = M(dt - M_\varphi d\varphi), \quad \omega^{\hat{r}} = \gamma_{rr}^{1/2} dr, \quad \omega^{\hat{\theta}} = \gamma_{\theta\theta}^{1/2} d\theta, \quad \omega^{\hat{\varphi}} = \gamma_{\varphi\varphi}^{1/2} d\varphi. \quad (4.41)$$

其对偶标架场为

$$e_{\hat{t}} = M^{-1} \partial_t \equiv m, \quad e_{\hat{r}} = \gamma_{rr}^{-1/2} \partial_r, \quad e_{\hat{\theta}} = \gamma_{\theta\theta}^{-1/2} \partial_\theta, \quad e_{\hat{\varphi}} = \gamma_{\varphi\varphi}^{-1/2} (\partial_\varphi + M_\varphi \partial_t). \quad (4.42)$$

$m$  为静止观测者的 4-速度。对应的坐标变换为

$$\omega^{\hat{\alpha}} = \omega^{\hat{\alpha}}_\beta dx^\beta, \quad e_{\hat{\alpha}} = e^\beta_{\hat{\alpha}} \partial_\beta, \quad (4.43)$$

其中  $\omega_{\beta}^{\hat{\alpha}}$  可以拆成两部分

$$(\omega_{\beta}^{\hat{\alpha}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \nu_{(n)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{rr}^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{\theta\theta}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{\varphi\varphi}^{1/2} \end{pmatrix}, \quad (4.44)$$

其中

$$\nu_{(n)} = \nu(n, m) = -\gamma_{\varphi\varphi}^{-1/2} M M_{\varphi} = \frac{2aM}{r\sqrt{\Delta}}, \quad (4.45)$$

是静止观测者相对于 ZAMO (zero angular momentum observer) 观测者的速度,  $n$  为 ZAMO 的 4-速度。同样地, 我们也可以将 Fermi 坐标的坐标基写成相同的形式  $W^{\hat{\alpha}} = W^{\hat{\alpha}}_B dX^B$

$$(W^{\hat{\alpha}}_B) = \begin{pmatrix} 1 & -\Omega X^3 & 0 & \Omega X^1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + AX^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

如前所述, 如果我们固定方向  $(X^1, X^2, X^3) \sim (r, \theta, \varphi)$ , 对于静止观测者  $r = r_0, \theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0$ , 坐标变换可以写成

$$\omega_{\beta}^{\hat{\alpha}} \Big|_{X^i=0} (x^{\beta} - x_0^{\beta}) = \delta^{\hat{\alpha}}_B X^B + b^{\hat{\alpha}}_{BC} X^B X^C + \mathcal{O}(3), \quad (4.47)$$

或者微分形式

$${}^{(0)}\omega^{\hat{\alpha}} \equiv \omega^{\hat{\alpha}} \Big|_{X^i=0} = [\delta^{\hat{\alpha}}_B + 2b^{\alpha}_{0B}] dX^B + \mathcal{O}(2). \quad (4.48)$$

于是 Jacobi 矩阵为

$$J^{\alpha}_B = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial X^B} = {}^{(0)}e^{\alpha}_{\hat{\gamma}} [\delta^{\hat{\gamma}}_B + 2b^{\hat{\gamma}}_{BC} X^C] + \mathcal{O}(2). \quad (4.49)$$

度规随坐标的变换为

$$g_{AB} = \eta_{\hat{\gamma}\hat{\delta}} \omega^{\hat{\gamma}}_{\alpha} \omega^{\hat{\delta}}_{\beta} J^{\alpha}_A J^{\beta}_B. \quad (4.50)$$

为了将度规写成一阶, 需要将坐标变换也展开到一阶, 在赤道面上, 上述所有都只是  $r$  到函数, 因此只对  $r$  展开即可

$$\begin{aligned} \omega^{\hat{\gamma}}_{\alpha} &= {}^{(0)}\omega^{\hat{\gamma}}_{\alpha} + {}^{(0)}(\omega^{\hat{\gamma}}_{\alpha, \hat{r}}) X^1 + \mathcal{O}(2) \\ &= [\delta^{\hat{r}}_{\hat{\delta}} + {}^{(0)}(\omega^{\hat{\delta}}_{\mu, \hat{r}} e^{\mu}_{\hat{\delta}}) X^1] {}^{(0)}\omega^{\hat{\delta}}_{\alpha} + \mathcal{O}(2), \end{aligned} \quad (4.51)$$

其中

$$(\omega^{\hat{\alpha}}_{\mu, \hat{r}} e^{\mu}_{\hat{\beta}}) = \text{diag}(a(m)^{\hat{r}}, -\kappa(x^i, m)^{\hat{r}}) + (2\omega(m)^{\hat{\theta}} \delta^{\hat{\alpha}}_0 \delta^{\hat{\beta}}_{\hat{\beta}}). \quad (4.52)$$

其中  $a(m)^{\hat{r}} = (\ln M)_{, \hat{r}}$  是静止观测者的径向加速度,  $\omega(m)^{\hat{\theta}}$  是静止观测者唯一非零的旋转速度分量,  $\kappa(x^i, m)^{\hat{r}} = -(\ln \gamma_{ii}^{1/2})_{, \hat{r}}$  是度规对角项的曲率分量, 这些量的值由(4.41)求导再乘上(4.42)给出

$$\begin{aligned} a(m)^{\hat{r}} &= \frac{M\sqrt{\Delta}}{r^2(r-2M)}, & \omega(m)^{\hat{\theta}} &= -\frac{aM}{r^2(r-2M)}, \\ \kappa(r, m) &= \frac{Mr - a^2}{r^2\sqrt{\Delta}}, & \kappa(\theta, m)^{\hat{r}} &= \frac{\sqrt{\Delta}}{r}, & \kappa(\varphi, m)^{\hat{r}} &= \frac{r(r-2M)^2 - Ma^2}{r^2\sqrt{\Delta}(r-2M)}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

将它们代入(4.50)式并保留到一阶得

$$2AX^1\delta^0_A\delta^0_B + 2\Omega(X^3\delta^1_{(A}X^1\delta^3_{(A)}\delta^0_{B)}) = 2\eta_{\hat{\gamma}\hat{\delta}}^{(0)}(\omega^{\hat{\gamma}}_{\mu, \hat{r}}e^{\mu}_{\hat{\alpha}})X^1\delta^{\hat{\alpha}}_A\delta^{\hat{\delta}}_B + 4\eta_{\hat{\gamma}\hat{\delta}}b^{\hat{\gamma}}_{A\hat{J}}\delta^{\hat{\delta}}_{B\hat{J}}. \quad (4.54)$$

这就是限制二阶展开的 40 个方程, 对比系数可得  $A = a(m)^{\hat{r}}$ ,  $\Omega = \omega^2 = \omega(m)^{\hat{\theta}}$ , 然后就得到了(4.47)的坐标变换

$${}^{(0)}M \left[ (t - t_0) - {}^{(0)}M_{\varphi}(\varphi - \varphi_0) \right] = T - {}^{(0)}\omega(m)^{\hat{\theta}} X^1 X^3 + \mathcal{O}(3), \quad (4.55a)$$

$$\begin{aligned} {}^{(0)}\gamma_{rr}^{1/2}(r - r_0) &= X^1 \left( 1 + \frac{1}{2} {}^{(0)}\kappa(r, m)^{\hat{r}} X^1 \right) - \frac{1}{2} {}^{(0)}\kappa(\theta, m)^{\hat{r}} (X^2)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} {}^{(0)}\kappa(\varphi, m)^{\hat{r}} (X^3)^2 + \mathcal{O}(3), \end{aligned} \quad (4.55b)$$

$${}^{(0)}\gamma_{\theta\theta}^{1/2}(\theta - \theta_0) = X^2 \left( 1 + {}^{(0)}\kappa(\theta, m)^{\hat{r}} X^1 \right) + \mathcal{O}(3), \quad (4.55c)$$

$${}^{(0)}\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}(\varphi - \varphi_0) = X^3 \left( 1 + {}^{(0)}\kappa(\varphi, m)^{\hat{r}} X^1 \right) + \mathcal{O}(3). \quad (4.55d)$$

这些式子实际上是由(4.48)积分而来, 如

$$\begin{aligned} (r - r_0)^1 &= \int \left[ \gamma_{rr}^{-1/2} + \mathcal{O}(2) \right] dX^1 \\ &= {}^{(0)}\gamma_{rr}^{-1/2} \int \left[ 1 + {}^{(0)}\kappa(r, m)^{\hat{r}} X^1 \right] dX^1 + \mathcal{O}(3) \\ &= {}^{(0)}\gamma_{rr}^{-1/2} \left[ X^1 + \frac{1}{2} {}^{(0)}\kappa(r, m)^{\hat{r}} (X^1)^2 \right] + \mathcal{O}(3). \end{aligned} \quad (4.56)$$

写成更便于计算的形式就是

$$t - t_0 = {}^{(0)}M^{-1} \left[ T - {}^{(0)}\nu(n, m) X^3 \left( 1 + \kappa(\theta, m)^{\hat{r}} X^1 \right) - {}^{(0)}\omega(m)^{\hat{\theta}} X^1 X^3 \right] + \mathcal{O}(3), \quad (4.57a)$$

$$\begin{aligned} r - r_0 &= {}^{(0)}\gamma_{rr}^{-1/2} X^1 \left( 1 + \frac{1}{2} {}^{(0)}\kappa(r, m)^{\hat{r}} X^1 \right) - \frac{1}{2} {}^{(0)}\kappa(\theta, m)^{\hat{r}} (X^2)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} {}^{(0)}\kappa(\varphi, m)^{\hat{r}} (X^3)^2 + \mathcal{O}(3), \end{aligned} \quad (4.57b)$$

$$\theta - \theta_0 = {}^{(0)}\gamma_{\theta\theta}^{-1/2} X^1 \left( 1 + {}^{(0)}\kappa(\theta, m)^{\hat{r}} X^1 \right) + \mathcal{O}(3), \quad (4.57c)$$

$$\theta - \theta_0 = {}^{(0)}\gamma_{\varphi\varphi}^{-1/2} X^1 \left( 1 + {}^{(0)}\kappa(\varphi, m)^{\hat{r}} X^1 \right) + \mathcal{O}(3). \quad (4.57d)$$

若观测者在赤道面上做圆轨道运动（不一定沿测地线但必须是类时的轨道），我们可以做坐标变换

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{r} = r, \quad \tilde{\theta} = \theta, \quad \tilde{\varphi} = \varphi - \zeta t, \quad (4.58)$$

其中  $\zeta$  是在无穷远处观测者眼中，圆轨道观测者的角速度。圆轨道观测者的 4-速度于是为  $\tilde{m} = \Gamma(\partial_t + \zeta\partial_\varphi)$ ， $\Gamma > 0$  为归一化系数。设  $U = \tilde{m} = \Gamma(\partial_t + \zeta\partial_\varphi)$ 。如果从静止观测者(4.42)通过 Lorentz 变换得到同样半径处圆周运动的观测者的世界线，其 4-速度应该是

$$U = \gamma(e_{\tilde{t}} + \nu e_{\tilde{\varphi}}), \quad \gamma = (1 - \nu^2)^{-1/2}, \quad (4.59)$$

其中  $\nu$  是在相同半径处静止的观测者与圆运动观测者重合时二者的相对速度。对比系数得

$$\Gamma = \gamma(M^{-1} + M_\varphi \nu \gamma_{\varphi\varphi}^{-1/2}), \quad \zeta = \frac{M\nu}{\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2} + MM_\varphi \nu}. \quad (4.60)$$

1-形式基也可以用 Lorentz 变换给出

$$W^{\tilde{t}} = \gamma[\omega^{\tilde{t}} - \nu\omega^{\tilde{\varphi}}], \quad W^{\tilde{r}} = \omega^{\tilde{r}} = g_{rr}^{1/2} dr, \quad W^{\tilde{\theta}} = \omega^{\tilde{\theta}} = g_{\theta\theta}^{1/2} d\theta, \quad W^{\tilde{\varphi}} = \gamma[-\nu\omega^{\tilde{t}} + \omega^{\tilde{\varphi}}]. \quad (4.61)$$

因此坐标变换方程右侧与(4.55)相似，但是  $\varphi$  方向要变成关于  $U$  的速度，方程左侧要加上 Lorentz boost

$$DT = T - \Omega(\nu)X^1X^3 + \mathcal{O}(3), \quad (4.62a)$$

$$DR = X^1 \left( 1 + \frac{1}{2} {}^{(0)}\kappa(r, m)^{\hat{r}} X^1 \right) - \frac{1}{2} {}^{(0)}\kappa(\theta, m)^{\hat{r}} (X^2)^2 - \frac{1}{2} {}^{(0)}\kappa(\varphi, U)^{\hat{r}} (X^3)^2 + \mathcal{O}(3), \quad (4.62b)$$

$$D\Theta = X^2 \left( 1 + {}^{(0)}\kappa(\theta, m)^{\hat{r}} X^1 \right) + \mathcal{O}(3), \quad (4.62c)$$

$$D\Phi = X^3 \left( 1 + {}^{(0)}\kappa(\varphi, U)^{\hat{r}} X^1 \right) + \mathcal{O}(3), \quad (4.62d)$$

其中

$$DT = \gamma \left[ {}^{(0)}M(t - t_0) - \left( {}^{(0)}M^{(0)}M_\varphi + \nu {}^{(0)}\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2} \right) (\varphi - \varphi_0) \right], \quad (4.63a)$$

$$DR = {}^{(0)}\gamma_{rr}^{1/2} (r - r_0), \quad (4.63b)$$

$$D\Theta = {}^{(0)}\gamma_{\theta\theta}^{1/2} (\theta - \theta_0), \quad (4.63c)$$

$$D\Phi = \gamma \left[ -{}^{(0)}M\nu(t - t_0) + \left( {}^{(0)}M^{(0)}M_\varphi \nu + {}^{(0)}\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2} \right) (\varphi - \varphi_0) \right]. \quad (4.63d)$$

令  $X^3 = 0$  可以得到 BL 坐标系下的轨道方程

$$\varphi - \varphi_0 = \zeta(t - t_0). \quad (4.64)$$

同样对比系数得到新的 4-加速度为

$$\kappa(\nu) = \gamma^{2(0)} \kappa(\varphi, m)^{\hat{r}} (\nu - \nu_+) (\nu - \nu_-) \equiv A, \quad (4.65)$$

其中测地线对应的速度为（正负号代表正转和反转轨道）

$$\nu_{\pm} = \frac{\sqrt{\Delta}}{a \pm (r - 2M) \sqrt{r/M}}. \quad (4.66)$$

转动角速度

$$\Omega(\nu) = \frac{1}{2} \gamma^{-2} \frac{d\kappa(\nu)}{d\nu}, \quad (4.67)$$

共动角向曲率为

$$\kappa(\varphi, U)^{\hat{r}} = -\gamma^2 \kappa(\varphi, m) (1 - \nu\nu_+) (1 - \nu\nu_-) = -\kappa(\nu^{-1}), \quad (4.68)$$

以及

$$a(m)^{\hat{r}} = \kappa(\varphi, m)^{\hat{r}} \nu_+ \nu_-, \quad -2\omega(m)^{\hat{\theta}} = \kappa(\varphi, m) (\nu_+ + \nu_-). \quad (4.69)$$

若圆轨道观测者恰好走圆测地线，即我们 b-EMRI 模型中 OB 的质心，则  $\nu = \nu_{\pm}$ ，加速度  $A = 0$ ，

$$\kappa(\varphi, U_{\pm})^{\hat{r}} = \kappa(\varphi, m)^{\hat{r}} - a(m)^{\hat{r}} = \kappa(\varphi, m)^{\hat{r}} (1 - \nu_+ \nu_-). \quad (4.70)$$

角速度变为

$$\Omega(\nu_{\pm}) = \mp \sqrt{\frac{M}{r^3}}, \quad (4.71)$$

取顺转轨道对应的负号即为(4.5)中的  $\Omega$ 。BL 坐标系中观测到的角速度

$$\zeta_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{M}{r^3}} \left( 1 \pm a \sqrt{\frac{M}{r^3}} \right)^{-1}. \quad (4.72)$$

上一小节中得到的(4.6)式是将(4.62)和(4.63)化简后的结果。为了避免符号的重复定义，我们对部分符号进行了重命名：

$$\begin{aligned} \kappa_r &\equiv {}^{(0)}\kappa(r, m)^{\hat{r}}, & \kappa_{\theta} &\equiv {}^{(0)}\kappa(\theta, m)^{\hat{r}}, \\ \kappa_{\varphi} &\equiv {}^{(0)}\kappa(\varphi, U)^{\hat{r}}, & \mathcal{M} &\equiv {}^{(0)}M, & \mathcal{M}_{\varphi} &\equiv {}^{(0)}M_{\varphi}, \\ \gamma_{rr}^{1/2} &\equiv {}^{(0)}\gamma_{rr}^{1/2}, & \gamma_{\theta\theta}^{1/2} &\equiv {}^{(0)}\gamma_{\theta\theta}^{1/2}, & \gamma_{\varphi\varphi}^{1/2} &\equiv {}^{(0)}\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

### 1.3.3 (4.7)式中的展开系数

对(4.6)式进一步展开得到

$$t = t_0 + \frac{\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2} + \mathcal{M}\mathcal{M}_\varphi\nu}{\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}\mathcal{M}/\gamma}T + \frac{\mathcal{M}\mathcal{M}_\varphi + \gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}\nu}{\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}\mathcal{M}/\gamma}X^3 + \frac{(\mathcal{M}\mathcal{M}_\varphi + \gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}\nu)\kappa_\varphi - (\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2} + \mathcal{M}\mathcal{M}_\varphi\nu)\Omega}{\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}\mathcal{M}/\gamma}X^1X^3, \quad (4.74a)$$

$$r = r_0 + \frac{1}{\gamma_{rr}^{1/2}}X^1 + \frac{\kappa_r}{2\gamma_{rr}^{1/2}}(X^1)^2 - \frac{\kappa_\theta}{2\gamma_{rr}^{1/2}}(X^2)^2 - \frac{\kappa_\varphi}{2\gamma_{rr}^{1/2}}(X^3)^2, \quad (4.74b)$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{\gamma_{\theta\theta}^{1/2}}X^2 + \frac{\kappa_\theta}{\gamma_{\theta\theta}^{1/2}}X^1X^2, \quad (4.74c)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\nu\gamma}{\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}}T + \frac{\gamma}{\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}}X^3 + \frac{\kappa_\varphi - \nu\Omega}{\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}/\gamma}X^1X^3, \quad (4.74d)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \sqrt{1 - \frac{2M}{p}}, \quad \mathcal{M}_\varphi = -\frac{2aM}{p - 2M}, \quad \Delta_0 = p^2 - 2Mp + a^2, \quad \Omega = -\sqrt{\frac{M}{p^3}} \\ \gamma_{rr}^{1/2} &= \frac{p}{\sqrt{\Delta_0}}, \quad \gamma_{\theta\theta}^{1/2} = \sqrt{\Delta_0}, \quad \gamma_{\varphi\varphi}^{1/2} = \sqrt{\frac{p\Delta_0}{p - 2M}}, \quad \kappa_r = \frac{Mp - a^2}{p^2\sqrt{\Delta_0}}, \quad \kappa_\theta = -\frac{\sqrt{\Delta_0}}{p^2}, \\ \kappa_\varphi &= \frac{a^2Mp - 4M^2p^2 + 4Mp^3 - p^4 - M\Delta_0}{p^2(p - 2M)\sqrt{\Delta_0}}, \quad \nu = \frac{\sqrt{\Delta_0}}{a + (p - 2M)\sqrt{p/M}}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \nu^2}}, \\ t_0 &= 0, \quad r_0 = p, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.75)$$

容易验证(4.74)式中  $t$  和  $\varphi$  分量的  $T$  系数项正好对应四维速度分量  $u^t$  和  $u^\varphi$ 。

将(4.4)-(4.5)式代入(4.74)式，得到一阶和二阶展开系数：

$$c_{01} = \frac{\mathcal{M}\mathcal{M}_\varphi + \gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}\nu}{4\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}\mathcal{M}/\gamma} \left\{ (1 + \cos \tilde{\theta}) \sin [(\Omega + \omega_{\text{IB}})\tau - \tilde{\varphi}] - (1 - \cos \tilde{\theta}) \sin [(\Omega - \omega_{\text{IB}})\tau - \tilde{\varphi}] \right\}, \quad (4.76a)$$

$$c_{11} = \frac{1}{4\gamma_{rr}^{1/2}} \left\{ (1 + \cos \tilde{\theta}) \cos [(\Omega + \omega_{\text{IB}})\tau - \tilde{\varphi}] - (1 - \cos \tilde{\theta}) \cos [(\Omega - \omega_{\text{IB}})\tau - \tilde{\varphi}] \right\}, \quad (4.76b)$$

$$c_{21} = \frac{1}{2\gamma_{\theta\theta}^{1/2}} \sin \tilde{\theta} \cos(\omega_{\text{IB}}\tau), \quad (4.76c)$$

$$c_{31} = \frac{\gamma}{4\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}} \left\{ (1 + \cos \tilde{\theta}) \sin [(\Omega + \omega_{\text{IB}})\tau - \tilde{\varphi}] - (1 - \cos \tilde{\theta}) \sin [(\Omega - \omega_{\text{IB}})\tau - \tilde{\varphi}] \right\}, \quad (4.76d)$$

$$\begin{aligned} c_{02} &= \frac{(\mathcal{M}\mathcal{M}_\varphi + \gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}\nu)\kappa_\varphi - (\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2} + \mathcal{M}\mathcal{M}_\varphi\nu)\Omega}{16\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}\mathcal{M}/\gamma} \times \left\{ 2 \cos^4 \frac{\tilde{\theta}}{2} \sin [2(\Omega + \omega_{\text{IB}})\tau - 2\tilde{\varphi}] \right. \\ &\quad \left. - \sin^2 \tilde{\theta} \sin(2\Omega\tau - 2\tilde{\varphi}) + 2 \sin^4 \frac{\tilde{\theta}}{2} \sin [2(\Omega - \omega_{\text{IB}})\tau - 2\tilde{\varphi}] \right\}, \quad (4.76e) \end{aligned}$$

$$c_{12} = \frac{\kappa_r + \kappa_\varphi}{16\gamma_{rr}^{1/2}} \cos^4 \frac{\tilde{\theta}}{4} \cos [2(\Omega + \omega_{\text{IB}})\tau - 2\tilde{\varphi}] + \frac{\kappa_r + \kappa_\varphi}{16\gamma_{rr}^{1/2}} \sin^4 \frac{\tilde{\theta}}{2} \cos [2(\Omega - \omega_{\text{IB}})\tau - 2\tilde{\varphi}]$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\kappa_r + \kappa_\varphi}{32\gamma_{rr}^{1/2}} \sin^2 \tilde{\theta} \cos(2\Omega\tau - 2\tilde{\varphi}) - \frac{\kappa_r + 2\kappa_\theta - \kappa_\varphi}{32\gamma_{rr}^{1/2}} \sin^2 \tilde{\theta} \cos(2\omega_{\text{IB}}\tau) \\
 & + \frac{\kappa_r - \kappa_\varphi}{32\gamma_{rr}^{1/2}} (1 + \cos^2 \tilde{\theta}) - \frac{\kappa_\theta}{16\gamma_{rr}^{1/2}} \sin^2 \tilde{\theta}, \tag{4.76f}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{22} = & \frac{\kappa_\theta \sin \tilde{\theta}}{16\gamma_{\theta\theta}^{1/2}} \left\{ (1 + \cos \tilde{\theta}) \cos[(\Omega + 2\omega_{\text{IB}})\tau - \tilde{\varphi}] - (1 - \cos \tilde{\theta}) \cos[(\Omega - 2\omega_{\text{IB}})\tau - \tilde{\varphi}] \right. \\
 & \left. + 2 \cos \tilde{\theta} \cos(\Omega\tau - \tilde{\varphi}) \right\}, \tag{4.76g}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{32} = & \frac{\kappa_\varphi - \nu\Omega}{16\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}/\gamma} \times \left\{ 2 \cos^4 \frac{\tilde{\theta}}{2} \sin[2(\Omega + \omega_{\text{IB}})\tau - 2\tilde{\varphi}] - \sin^2 \tilde{\theta} \sin(2\Omega\tau - 2\tilde{\varphi}) \right. \\
 & \left. + 2 \sin^4 \frac{\tilde{\theta}}{2} \sin[2(\Omega - \omega_{\text{IB}})\tau - 2\tilde{\varphi}] \right\}. \tag{4.76h}
 \end{aligned}$$

可以看出，所有这些系数都是  $\tau$  的函数。

## 2. Teukolsky 源的展开

在计算 EMRI 波形时，我们得到了一个任意轨道小黑洞的静态波形可以表示为(3.159)式，这是已经提取出 EMRI 频谱(3.156b)后的结果。但我们还不知道 b-EMRI 的频谱是何种形式，因此先退回到 Fourier 逆变换之前的波形

$$h_+ - ih_\times = -\frac{2\mu}{r} \sum_{lm} \int d\omega \frac{Z_{lm}^{\text{in}} - 2S_{lm}^{a\omega}(\theta)}{\omega^2 \sqrt{2\pi}} e^{-i\omega(t-r_*) + im\varphi}, \tag{4.77}$$

其中

$$Z_{lm}^{\text{in}} = Z_{lm}^{\text{in}}(r \rightarrow \infty, \omega) = \frac{1}{\mathcal{W}_{lm}(\omega)} \int_{r_+}^{\infty} dr' \frac{R_{lm}^{\text{in}}(r', \omega)}{\Delta^2} \mathcal{T}_{lm}(r', \omega), \tag{4.78}$$

这里的  $\mathcal{W}_{lm}(\omega)$  是定义在(3.121)式的 Wronskian， $\mathcal{T}_{lm}(r, \omega)$  定义在(3.143)式，6 个表达式  $A$  中的  $C_{nn}, C_{\bar{m}n}, C_{\bar{m}\bar{m}}$  定义在(3.136)式。

(4.7)式启发我们将 Teukolsky 源项展开为  $d$  的级数。直接结果是(3.144)式定义的振幅  $Z_{lm}^{\text{in}}$  也变为  $d$  的级数。为展开  $Z_{lm}^{\text{in}}$ ，首先注意到最一般情形下可将其改写为：

$$Z_{lm}^{\text{in}}(\omega) = \frac{\mu}{\mathcal{W}_{lm}(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{dt}{d\tau} e^{i\omega t(\tau, d) - im\varphi(\tau, d)} \mathcal{Z}_{lm}[r(\tau, d), \theta(\tau, d)]. \tag{4.79}$$

利用(4.7)式，指数项可展开为：

$$\exp[i\omega t - im\varphi] = \mathcal{E}_{lm}^{(0)}(\tau, \omega) + \mathcal{E}_{lm}^{(1)}(\tau, \omega)d + \mathcal{E}_{lm}^{(2)}(\tau, \omega)d^2 + \mathcal{O}(d^3), \tag{4.80}$$

其中

$$\mathcal{E}_{lm}^{(0)}(\tau, \omega) = \exp\left[i\left(\omega u^t - m u^\varphi\right)\tau\right], \tag{4.81a}$$

$$\mathcal{E}_{lm}^{(1)}(\tau, \omega) = \exp \left[ i \left( \omega u^t - m u^\varphi \right) \tau \right] \times i(\omega c_{01} - m c_{31}), \quad (4.81b)$$

$$\mathcal{E}_{lm}^{(2)}(\tau, \omega) = \exp \left[ i \left( \omega u^t - m u^\varphi \right) \tau \right] \times \left[ i(\omega c_{02} - m c_{32}) - \frac{1}{2}(\omega c_{01} - m c_{31})^2 \right]. \quad (4.81c)$$

同样地，我们可以将  $\mathcal{Z}_{lm}$  展开为

$$\mathcal{Z}_{lm}[r, \theta] = \mathcal{Z}_{lm}^{(0)}(r_0, \theta_0) + \mathcal{Z}_{lm}^{(1)}(r_0, \theta_0)d + \mathcal{Z}_{lm}^{(2)}(r_0, \theta_0)d^2 + \mathcal{O}(d^3), \quad (4.82)$$

其中

$$\mathcal{Z}_{lm}^{(0)}(r_0, \theta_0) = \mathcal{Z}_{lm}(r, \theta, d) \Big|_{d=0}, \quad (4.83a)$$

$$\mathcal{Z}_{lm}^{(1)}(r_0, \theta_0) = \frac{d\mathcal{Z}_{lm}(r, \theta, d)}{dd} \Big|_{d=0} = (\partial_r \mathcal{Z}_{lm})_{d=0} c_{11} + (\partial_\theta \mathcal{Z}_{lm})_{d=0} c_{21} + (\partial_d \mathcal{Z}_{lm})_{d=0}, \quad (4.83b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{lm}^{(2)}(r_0, \theta_0) &= \frac{1}{2} \frac{d^2 \mathcal{Z}_{lm}(r, \theta, d)}{dd^2} \Big|_{d=0} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_r^2 \mathcal{Z}_{lm})_{d=0} c_{11}^2 + \frac{1}{2} (\partial_\theta \partial_r \mathcal{Z}_{lm})_{d=0} c_{11} c_{21} + \frac{1}{2} (\partial_d \partial_r \mathcal{Z}_{lm})_{d=0} c_{11} \\ &\quad + (\partial_r \mathcal{Z}_{lm})_{d=0} c_{12} + \frac{1}{2} (\partial_\theta^2 \mathcal{Z}_{lm})_{d=0} c_{21}^2 + \frac{1}{2} (\partial_r \partial_\theta \mathcal{Z}_{lm})_{d=0} c_{21} c_{11} \\ &\quad + \frac{1}{2} (\partial_d \partial_\theta \mathcal{Z}_{lm})_{d=0} c_{21} + (\partial_\theta \mathcal{Z}_{lm})_{d=0} c_{22} + \frac{1}{2} (\partial_r \partial_d \mathcal{Z}_{lm})_{d=0} c_{11} \\ &\quad + \frac{1}{2} (\partial_\theta \partial_d \mathcal{Z}_{lm})_{d=0} c_{21} + \frac{1}{2} (\partial_d^2 \mathcal{Z}_{lm})_{d=0}. \end{aligned} \quad (4.83c)$$

通过将(4.80)和(4.82)式代入(4.79)式并展开为  $d$  的级数，我们得到

$$Z_{lm}^{\text{in}}(\omega) = \frac{1}{\mathcal{W}_{lm}(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ Z_{lm}^{(0)}(\tau, \omega) + Z_{lm}^{(1)}(\tau, \omega)d + Z_{lm}^{(2)}(\tau, \omega)d^2 + \mathcal{O}(d^3) \right] d\tau, \quad (4.84)$$

其中

$$Z_{lm}^{(0)}(\tau, \omega) = \mathcal{E}_{lm}^{(0)}(\tau, \omega) \mathcal{Z}_{lm}^{(0)}(r_0, \theta_0), \quad (4.85a)$$

$$Z_{lm}^{(1)}(\tau, \omega) = \mathcal{E}_{lm}^{(0)}(\tau, \omega) \mathcal{Z}_{lm}^{(1)}(r_0, \theta_0) + \mathcal{E}_{lm}^{(1)}(\tau, \omega) \mathcal{Z}_{lm}^{(0)}(r_0, \theta_0), \quad (4.85b)$$

$$Z_{lm}^{(2)}(\tau, \omega) = \mathcal{E}_{lm}^{(0)}(\tau, \omega) \mathcal{Z}_{lm}^{(2)}(r_0, \theta_0) + \mathcal{E}_{lm}^{(1)}(\tau, \omega) \mathcal{Z}_{lm}^{(1)}(r_0, \theta_0) + \mathcal{E}_{lm}^{(2)}(\tau, \omega) \mathcal{Z}_{lm}^{(0)}(r_0, \theta_0). \quad (4.85c)$$

这里我们在 IB 质心 ( $d = 0$ ) 处计算  $r$  和  $\theta$ ，如前所述，其近似遵循测地圆轨道运动，因此有  $r_0 = p$  和  $\theta_0 = \pi/2$ 。

对于零阶展开，积分直接可得

$$\begin{aligned} Z_{lm}^{\text{in}(0)}(\omega) &= \frac{1}{\mathcal{W}_{lm}(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} Z_{lm}^{(0)}(\tau, \omega) d\tau \\ &= \frac{1}{\mathcal{W}_{lm}(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega u^t - m u^\varphi)\tau} \mathcal{Z}_{lm}^{(0)}(r_0, \theta_0, \omega) d\tau \\ &= \frac{2\pi}{u^t \mathcal{W}_{lm}(\omega)} \delta \left( \omega - m \frac{u^\varphi}{u^t} \right) \mathcal{Z}_{lm}^{(0)}(r_0, \theta_0, \omega). \end{aligned} \quad (4.86)$$

这表明零阶引力辐射对应的频率为

$$\omega_m^{(0)} = m \frac{u^\varphi}{u^t}, \quad m = -l, \dots, l. \quad (4.87)$$

现在我们转向(4.84)和(4.85)式定义的一阶和二阶项。实际上, 展开系数  $c_{01}$ 、 $c_{02}$ 、 $c_{11}$ 、 $c_{12}$ 、 $c_{21}$ 、 $c_{22}$ 、 $c_{31}$ 、 $c_{32}$  的引入带来了关于  $\tau$  的额外三角函数项。我们使用

$$\sin A = \frac{e^{iA} - e^{-iA}}{2i}, \quad \cos A = \frac{e^{iA} + e^{-iA}}{2}, \quad (4.88)$$

将这些三角函数项转换为指数形式。然后如(4.86)的示例, 将积分转化为 delta 函数, 即可得到一阶和二阶波形的频率与振幅。

对于一阶波形, 我们发现频率满足条件

$$\omega_{mwv}^{(1)} = m \frac{u^\varphi}{u^t} + w \frac{\Omega}{u^t} + v \frac{\omega_{\text{IB}}}{u^t}, \quad (4.89)$$

其中  $m = -l, \dots, l$ ,  $w = 0, \pm 1$ ,  $v = \pm 1$ 。因此每个  $m$  对应六个分裂的一阶模式, 其振幅为

$$Z_{lm}^{\text{in}(1)} = \frac{2\pi}{u^t} \sum_{wv} \frac{Z_{lmwv}^{(1)}}{\mathcal{W}_{lmwv}}. \quad (4.90)$$

其中  $Z_{lmwv}^{(1)} \equiv Z_{lm}^{(1)}(r_0, \theta_0, \omega_{mwv}^{(1)})$  为分裂一阶振幅,  $\mathcal{W}_{lmwv} \equiv \mathcal{W}_{lm}(\omega_{mwv})$  为 Wronskian 在分立频率下的表示。

对于二阶波形, 每个  $m$  对应十五个模式, 由下式给出

$$\omega_{mwv}^{(2)} = m \frac{u^\varphi}{u^t} + w \frac{\Omega}{u^t} + v \frac{\omega_{\text{IB}}}{u^t}, \quad (4.91)$$

其中  $m = -l, \dots, l$ ,  $w = 0, \pm 1, \pm 2$ ,  $v = 0, \pm 2$ 。振幅为

$$Z_{lm}^{\text{in}(2)} = \frac{2\pi}{u^t} \sum_{wv} \frac{Z_{lmwv}^{(2)}}{\mathcal{W}_{lmwv}}. \quad (4.92)$$

其中  $Z_{lmwv}^{(2)} \equiv Z_{lm}^{(2)}(r_0, \theta_0, \omega_{mwv}^{(2)})$  为分裂二阶振幅。六个  $Z_{lmwv}^{(1)}$  和十五个  $Z_{lmwv}^{(2)}$  的解析表达式推导如下:

将(4.81)和(4.83)式代入(4.85)式, 我们推导出  $Z_{lm}^{(1)}$  和  $Z_{lm}^{(2)}$  的表达式。一阶振幅的形式为

$$Z_{lm}^{(1)}(\tau, \omega) = \left[ \alpha_1 c_{01} + \alpha_2 c_{11} + \alpha_3 c_{21} + \alpha_4 c_{31} + \alpha_5 \partial_\tau c_{11} + \alpha_6 \partial_\tau c_{21} \right] \times \exp \left[ i \left( \omega u^t - m u^\varphi \right) \tau \right], \quad (4.93)$$

其中当固定  $r_0 = p$  和  $\theta_0 = \pi/2$  时,  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$ 、 $\alpha_5$ 、 $\alpha_6$  为常数。 $\partial_\tau c_{11}$  和  $\partial_\tau c_{21}$  项的出现是因为(3.136)式定义的  $C_{nm}$ 、 $C_{\bar{m}n}$ 、 $C_{\bar{m}\bar{m}}$  中包含  $dr/d\tau$  和  $d\theta/d\tau$  项。通过 Mathematica 匹配  $c_{01}$ 、 $c_{11}$ 、 $c_{21}$ 、 $c_{31}$ 、 $\partial_\tau c_{11}$ 、 $\partial_\tau c_{21}$  的解析表达式, 不难获得它们的完整形式, 但由于篇幅限制, 此处不予展示。

进一步应用(4.76)式, 可将结果展开为正余弦函数的组合:

$$\begin{aligned}
 Z_{lm}^{(1)}(\tau, \omega) = & \left\{ \tilde{\alpha}_1 \sin [(\Omega + \omega_{\text{IB}}) \tau - \tilde{\varphi}] + \tilde{\alpha}_2 \cos [(\Omega + \omega_{\text{IB}}) \tau - \tilde{\varphi}] \right. \\
 & + \tilde{\alpha}_3 \sin [(\Omega - \omega_{\text{IB}}) \tau - \tilde{\varphi}] + \tilde{\alpha}_4 \cos [(\Omega - \omega_{\text{IB}}) \tau - \tilde{\varphi}] \\
 & \left. + \tilde{\alpha}_5 \sin (\omega_{\text{IB}} \tau) + \tilde{\alpha}_6 \cos (\omega_{\text{IB}} \tau) \right\} \times \exp [i (\omega u^t - m u^\varphi) \tau].
 \end{aligned} \tag{4.94}$$

利用(4.88)式可得:

$$\begin{aligned}
 Z_{lm}^{(1)}(\tau, \omega) = & Z_{lm-1-1}^{(1)} \exp [i (\omega u^t - m u^\varphi + \Omega + \omega_{\text{IB}}) \tau] \\
 & + Z_{lm11}^{(1)} \exp [i (\omega u^t - m u^\varphi - \Omega - \omega_{\text{IB}}) \tau] \\
 & + Z_{lm-11}^{(1)} \exp [i (\omega u^t - m u^\varphi + \Omega - \omega_{\text{IB}}) \tau] \\
 & + Z_{lm1-1}^{(1)} \exp [i (\omega u^t - m u^\varphi - \Omega + \omega_{\text{IB}}) \tau] \\
 & + Z_{lm0-1}^{(1)} \exp [i (\omega u^t - m u^\varphi + \omega_{\text{IB}}) \tau] \\
 & + Z_{lm01}^{(1)} \exp [i (\omega u^t - m u^\varphi - \omega_{\text{IB}}) \tau].
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

当执行式 (4.84) 中的积分时, 这将产生相应的频率谱, 而指数项的系数即为分裂振幅

$$Z_{lm-1-1}^{(1)} = \frac{-i\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2}{2} e^{-i\tilde{\varphi}}, \tag{4.96a}$$

$$Z_{lm-11}^{(1)} = \frac{-i\tilde{\alpha}_3 + \tilde{\alpha}_4}{2} e^{-i\tilde{\varphi}}, \tag{4.96b}$$

$$Z_{lm0-1}^{(1)} = \frac{-i\tilde{\alpha}_5 + \tilde{\alpha}_6}{2}, \tag{4.96c}$$

$$Z_{lm01}^{(1)} = \frac{i\tilde{\alpha}_5 + \tilde{\alpha}_6}{2}, \tag{4.96d}$$

$$Z_{lm1-1}^{(1)} = \frac{i\tilde{\alpha}_3 + \tilde{\alpha}_4}{2} e^{+i\tilde{\varphi}}, \tag{4.96e}$$

$$Z_{lm11}^{(1)} = \frac{i\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2}{2} e^{+i\tilde{\varphi}}, \tag{4.96f}$$

其中

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{\gamma (1 + \cos \tilde{\theta})}{4\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}} \left[ \alpha_1 \frac{\mathcal{M}\mathcal{M}_\varphi + \gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}\nu}{\mathcal{M}} + \alpha_4 \right] - \frac{(\Omega + \omega_{\text{IB}})(1 + \cos \tilde{\theta})}{4\gamma_{rr}^{1/2}} \alpha_5, \tag{4.97a}$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \frac{1 + \cos \tilde{\theta}}{4\gamma_{rr}^{1/2}} \alpha_2, \tag{4.97b}$$

$$\tilde{\alpha}_3 = \frac{\gamma (1 - \cos \tilde{\theta})}{4\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}} \left[ \alpha_1 \frac{\mathcal{M}\mathcal{M}_\varphi + \gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}\nu}{\mathcal{M}} + \alpha_4 \right] - \frac{(\Omega - \omega_{\text{IB}})(1 - \cos \tilde{\theta})}{4\gamma_{rr}^{1/2}} \alpha_5, \tag{4.97c}$$

$$\tilde{\alpha}_4 = \frac{1 - \cos \tilde{\theta}}{4\gamma_{rr}^{1/2}} \alpha_2, \tag{4.97d}$$

$$\tilde{\alpha}_5 = \frac{\sin \tilde{\theta}}{2\gamma_{\theta\theta}^{1/2}} \alpha_3, \tag{4.97e}$$

$$\tilde{\alpha}_6 = \frac{\omega_{\text{IB}} \sin \tilde{\theta}}{2\gamma_{\theta\theta}^{1/2}} \alpha_6. \quad (4.97f)$$

对于二阶振幅，我们采用相同的方法。类比(4.93)式，可得：

$$\begin{aligned} Z_{lm}^{(2)}(\tau, \omega) = & \left\{ \beta_{00} c_{01} c_{01} + \beta_{01} c_{11} c_{11} + \beta_{02} c_{21} c_{21} + \beta_{03} c_{31} c_{31} + \beta_{04} c_{01} c_{11} + \beta_{05} c_{01} c_{21} \right. \\ & + \beta_{06} c_{01} c_{31} + \beta_{07} c_{11} c_{21} + \beta_{08} c_{11} c_{31} + \beta_{09} c_{21} c_{31} + \beta_{0a} c_{02} + \beta_{0b} c_{12} \\ & + \beta_{0c} c_{22} + \beta_{0d} c_{32} + \beta_{10} c_{01} c'_{11} + \beta_{11} c_{01} c'_{21} + \beta_{12} c_{11} c'_{11} + \beta_{13} c_{11} c'_{21} \\ & + \beta_{14} c_{21} c'_{11} + \beta_{15} c_{21} c'_{21} + \beta_{16} c_{31} c'_{11} + \beta_{17} c_{31} c'_{21} + \beta_{20} c'_{11} c'_{11} + \beta_{21} c'_{21} c'_{21} \\ & \left. + \beta_{22} c'_{11} c'_{21} + \beta_{23} c'_{12} + \beta_{24} c'_{22} \right\} \exp \left[ i \left( \omega u^t - m u^\varphi \right) \tau \right]. \end{aligned} \quad (4.98)$$

其中撇号表示对  $\tau$  求导。通过系数匹配，我们获得了这些  $\beta$  的解析表达式。现在需要将正弦和余弦项合并为指数项以获得频率谱。为简化表达式，我们将更新(4.76)式中的记号，因为原始表达式过于冗长。我们将其重写为：

$$c_{01} = \vartheta_{11} \sin [(\Omega + \omega_{\text{IB}})\tau - \tilde{\varphi}] + \vartheta_{12} \sin [(\Omega - \omega_{\text{IB}})\tau - \tilde{\varphi}], \quad (4.99a)$$

$$c_{11} = \vartheta_{21} \cos [(\Omega + \omega_{\text{IB}})\tau - \tilde{\varphi}] + \vartheta_{22} \cos [(\Omega - \omega_{\text{IB}})\tau - \tilde{\varphi}], \quad (4.99b)$$

$$c'_{11} = \vartheta'_{21} \sin [(\Omega + \omega_{\text{IB}})\tau - \tilde{\varphi}] + \vartheta'_{22} \sin [(\Omega - \omega_{\text{IB}})\tau - \tilde{\varphi}], \quad (4.99c)$$

$$c_{21} = \vartheta_{31} \sin(\omega_{\text{IB}}\tau), \quad (4.99d)$$

$$c'_{21} = \vartheta'_{31} \cos(\omega_{\text{IB}}\tau), \quad (4.99e)$$

$$c_{31} = \vartheta_{41} \sin [(\Omega + \omega_{\text{IB}})\tau - \tilde{\varphi}] + \vartheta_{42} \sin [(\Omega - \omega_{\text{IB}})\tau - \tilde{\varphi}], \quad (4.99f)$$

$$c_{02} = \vartheta_{51} \sin [2(\Omega + \omega_{\text{IB}})\tau - 2\tilde{\varphi}] + \vartheta_{52} \sin (2\Omega\tau - 2\tilde{\varphi}) + \vartheta_{53} \sin [2(\Omega - \omega_{\text{IB}})\tau - 2\tilde{\varphi}], \quad (4.99g)$$

$$\begin{aligned} c_{12} = & \vartheta_{61} \cos [2(\Omega + \omega_{\text{IB}})\tau - 2\tilde{\varphi}] + \vartheta_{62} \cos (2\Omega\tau - 2\tilde{\varphi}) + \vartheta_{63} \cos [2(\Omega - \omega_{\text{IB}})\tau - 2\tilde{\varphi}] \\ & + \vartheta_{64} \cos(2\omega_{\text{IB}}\tau) + \vartheta_{65}, \end{aligned} \quad (4.99h)$$

$$\begin{aligned} c'_{12} = & \vartheta'_{61} \sin [2(\Omega + \omega_{\text{IB}})\tau - 2\tilde{\varphi}] + \vartheta'_{62} \sin (2\Omega\tau - 2\tilde{\varphi}) + \vartheta'_{63} \sin [2(\Omega - \omega_{\text{IB}})\tau - 2\tilde{\varphi}] \\ & + \vartheta'_{64} \sin(2\omega_{\text{IB}}\tau), \end{aligned} \quad (4.99i)$$

$$c_{22} = \vartheta_{71} \cos [(\Omega + 2\omega_{\text{IB}})\tau - \tilde{\varphi}] + \vartheta_{72} \cos [(\Omega - 2\omega_{\text{IB}})\tau - \tilde{\varphi}] + \vartheta_{73} \cos (\Omega\tau - \tilde{\varphi}), \quad (4.99j)$$

$$c'_{22} = \vartheta'_{71} \sin [(\Omega + 2\omega_{\text{IB}})\tau - \tilde{\varphi}] + \vartheta'_{72} \sin [(\Omega - 2\omega_{\text{IB}})\tau - \tilde{\varphi}] + \vartheta'_{73} \sin (\Omega\tau - \tilde{\varphi}), \quad (4.99k)$$

$$c_{32} = \vartheta_{81} \sin [2(\Omega + \omega_{\text{IB}})\tau - 2\tilde{\varphi}] + \vartheta_{82} \sin (2\Omega\tau - 2\tilde{\varphi}) + \vartheta_{83} \sin [2(\Omega - \omega_{\text{IB}})\tau - 2\tilde{\varphi}], \quad (4.99l)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \vartheta_{11} &= \frac{\mathcal{M}\mathcal{M}_\varphi + \gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}\nu}{4\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}\mathcal{M}/\gamma} (1 + \cos\tilde{\theta}), & \vartheta_{12} &= -\frac{\mathcal{M}\mathcal{M}_\varphi + \gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}\nu}{4\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}\mathcal{M}/\gamma} (1 - \cos\tilde{\theta}), \\
 \vartheta_{21} &= \frac{1}{4\gamma_{rr}^{1/2}} (1 + \cos\tilde{\theta}), & \vartheta_{22} &= -\frac{1}{4\gamma_{rr}^{1/2}} (1 - \cos\tilde{\theta}), & \vartheta'_{21} &= -(\Omega + \omega_{\text{IB}})\vartheta_{21}, \\
 \vartheta'_{22} &= -(\Omega - \omega_{\text{IB}})\vartheta_{22}, & \vartheta_{31} &= \frac{1}{2\gamma_{\theta\theta}^{1/2}} \sin\tilde{\theta}, & \vartheta'_{31} &= -\omega_{\text{IB}}\vartheta_{31}, \\
 \vartheta_{41} &= \frac{\gamma}{4\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}} (1 + \cos\tilde{\theta}), & \vartheta_{42} &= -\frac{\gamma}{4\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}} (1 - \cos\tilde{\theta}), & \vartheta_{51} &= 2\Theta_0 \cos^4 \frac{\tilde{\theta}}{2}, \\
 \vartheta_{52} &= -\Theta_0 \sin^2 \tilde{\theta}, & \vartheta_{53} &= 2\Theta_0 \sin^4 \frac{\tilde{\theta}}{2}, \\
 \Theta_0 &= \frac{(\mathcal{M}\mathcal{M}_\varphi + \gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}\nu) \kappa_\varphi - (\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2} + \mathcal{M}\mathcal{M}_\varphi\nu) \Omega}{16\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}\mathcal{M}/\gamma}, \\
 \vartheta_{61} &= \frac{\kappa_r + \kappa_\varphi}{16\gamma_{rr}^{1/2}} \cos^4 \frac{\tilde{\theta}}{2}, & \vartheta_{62} &= \frac{\kappa_r + \kappa_\varphi}{16\gamma_{rr}^{1/2}} \sin^4 \frac{\tilde{\theta}}{2}, & \vartheta_{63} &= -\frac{\kappa_r + \kappa_\varphi}{32\gamma_{rr}^{1/2}} \sin^2 \tilde{\theta}, \\
 \vartheta_{64} &= -\frac{\kappa_r + 2\kappa_\theta - \kappa_\varphi}{32\gamma_{rr}^{1/2}} \sin^2 \tilde{\theta}, & \vartheta_{65} &= \frac{\kappa_r - \kappa_\varphi}{32\gamma_{rr}^{1/2}} (1 + \cos^2 \tilde{\theta}) - \frac{\kappa_\theta}{16\gamma_{rr}^{1/2}} \sin^2 \tilde{\theta}, \\
 \vartheta'_{61} &= -2(\Omega + \omega_{\text{IB}})\vartheta_{61}, & \vartheta'_{62} &= -2\Omega\vartheta_{62}, & \vartheta'_{63} &= -2(\Omega - \omega_{\text{IB}})\vartheta_{63}, \\
 \vartheta'_{64} &= -2\omega_{\text{IB}}\vartheta_{64}, & \vartheta_{71} &= \frac{\kappa_\theta \cos\tilde{\theta}}{16\gamma_{\theta\theta}^{1/2}} (1 + \cos\tilde{\theta}), & \vartheta_{72} &= -\frac{\kappa_\theta \cos\tilde{\theta}}{16\gamma_{\theta\theta}^{1/2}} (1 - \cos\tilde{\theta}), \\
 \vartheta_{73} &= \frac{\kappa_\theta}{8\gamma_{\theta\theta}^{1/2}} \cos(2\tilde{\theta}), & \vartheta'_{71} &= -(\Omega + 2\omega_{\text{IB}})\vartheta_{71}, & \vartheta'_{72} &= -(\Omega - 2\omega_{\text{IB}})\vartheta_{72}, \\
 \vartheta'_{73} &= -\Omega\vartheta_{73}, & \vartheta_{81} &= \frac{\kappa_\varphi - \nu\Omega}{8\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}/\gamma} \cos^4 \frac{\tilde{\theta}}{2}, \\
 \vartheta_{82} &= -\frac{\kappa_\varphi - \nu\Omega}{16\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}/\gamma} \sin^2 \tilde{\theta}, & \vartheta_{83} &= \frac{\kappa_\varphi - \nu\Omega}{6\gamma_{\varphi\varphi}^{1/2}/\gamma} \sin^4 \frac{\tilde{\theta}}{2}.
 \end{aligned} \tag{4.100}$$

类比(4.96)式, 各个二阶展开的振幅可以表示为

$$\begin{aligned}
 Z_{lm-2-2}^{(2)} &= -\frac{1}{4} \left[ \beta_{00}\vartheta_{11}^2 - \beta_{01}\vartheta_{21}^2 + \beta_{20}\vartheta_{21}'^2 + \beta_{03}\vartheta_{41}^2 + \beta_{10}\vartheta_{11}\vartheta_{21}' + \beta_{06}\vartheta_{11}\vartheta_{41} + \beta_{16}\vartheta_{21}'\vartheta_{41} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{4} \text{i} \left[ \beta_{04}\vartheta_{11}\vartheta_{21} + \beta_{12}\vartheta_{21}\vartheta_{21}' + \beta_{08}\vartheta_{21}\vartheta_{41} \right] + \frac{1}{2}(\beta_{0a} + \beta_{0b})\vartheta_{61} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \text{i} (\beta_{21}\vartheta_{61}' + \beta_{0d}\vartheta_{81}), \tag{4.101a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{lm-20}^{(2)} &= -\frac{1}{4} \left[ \beta_{10}(\vartheta_{12}\vartheta_{21}' + \vartheta_{11}\vartheta_{22}') + \beta_{06}(\vartheta_{12}\vartheta_{41} + \vartheta_{11}\vartheta_{42}) + \beta_{16}(\vartheta_{22}'\vartheta_{41} + \vartheta_{21}'\vartheta_{42}) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{4} \text{i} \left[ \beta_{04}(\vartheta_{12}\vartheta_{21} + \vartheta_{11}\vartheta_{22}) + \beta_{12}(\vartheta_{21}'\vartheta_{22} + \vartheta_{21}\vartheta_{22}') + \beta_{08}(\vartheta_{22}\vartheta_{41} + \vartheta_{21}\vartheta_{42}) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left[ -\beta_{00}\vartheta_{11}\vartheta_{12} + \beta_{01}\vartheta_{21}\vartheta_{22} - \beta_{20}\vartheta_{21}'\vartheta_{22}' - \beta_{03}\vartheta_{41}\vartheta_{42} + (\beta_{0a} + \beta_{0b})\vartheta_{62} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \text{i} (\beta_{23}\vartheta_{62}' + \beta_{0d}\vartheta_{82}), \tag{4.101b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{lm-22}^{(2)} = & -\frac{1}{4} \left[ \beta_{00} \vartheta_{12}^2 - \beta_{01} \vartheta_{22}^2 + \beta_{20} \vartheta_{22}'^2 + \beta_{03} \vartheta_{42}^2 + \beta_{10} \vartheta_{12} \vartheta_{22}' + \beta_{06} \vartheta_{12} \vartheta_{42} + \beta_{16} \vartheta_{22}' \vartheta_{42} \right] \\
 & - \frac{1}{4} i \left[ \beta_{04} \vartheta_{12} \vartheta_{22} + \beta_{12} \vartheta_{22} \vartheta_{22}' + \beta_{08} \vartheta_{22} \vartheta_{42} \right] + \frac{1}{2} (\beta_{0a} + \beta_{0b}) \vartheta_{63} \\
 & - \frac{1}{2} i (\beta_{23} \vartheta_{63}' + \beta_{0d} \vartheta_{83}), \tag{4.101c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{lm-1-2}^{(2)} = & -\frac{1}{4} \left[ \beta_{05} \vartheta_{11} \vartheta_{31} + \beta_{09} \vartheta_{31} \vartheta_{41} + \beta_{14} \vartheta_{21}' \vartheta_{31} - \beta_{13} \vartheta_{21} \vartheta_{31}' \right] + \frac{1}{2} \beta_{24} \vartheta_{71}' \\
 & - \frac{1}{4} i \left[ \beta_{07} \vartheta_{21} \vartheta_{31} + \beta_{11} \vartheta_{11} \vartheta_{31}' + \beta_{17} \vartheta_{31}' \vartheta_{41} + \beta_{22} \vartheta_{21}' \vartheta_{31}' \right] - \frac{1}{2} i \beta_{0c} \vartheta_{71}, \tag{4.101d}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{lm-10}^{(2)} = & \frac{1}{4} \left[ \beta_{05} \vartheta_{31} (\vartheta_{11} - \vartheta_{12}) + \beta_{14} \vartheta_{31} (\vartheta_{21}' - \vartheta_{22}') + \beta_{13} \vartheta_{31}' (\vartheta_{21} + \vartheta_{22}) \right. \\
 & \left. + \beta_{09} \vartheta_{31} (\vartheta_{41} - \vartheta_{42}) \right] - \frac{1}{4} i \left[ \beta_{07} \vartheta_{31} (\vartheta_{22} - \vartheta_{21}) + \beta_{11} \vartheta_{31}' (\vartheta_{11} + \vartheta_{12}) \right. \\
 & \left. + \beta_{22} \vartheta_{31}' (\vartheta_{21}' + \vartheta_{22}') + \beta_{17} \vartheta_{31}' (\vartheta_{41} + \vartheta_{42}) \right] - \frac{1}{2} i \beta_{0c} \vartheta_{73} + \frac{1}{2} \beta_{24} \vartheta_{73}', \tag{4.101e}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{lm-12}^{(2)} = & \frac{1}{4} \left[ \beta_{05} \vartheta_{12} \vartheta_{31} + \beta_{14} \vartheta_{22}' \vartheta_{31} + \beta_{13} \vartheta_{22} \vartheta_{31}' + \beta_{09} \vartheta_{31} \vartheta_{42} \right] + \frac{1}{4} i \left[ \beta_{11} \vartheta_{12} \vartheta_{31}' \right. \\
 & \left. - \beta_{07} \vartheta_{22}' \vartheta_{31} + \beta_{22} \vartheta_{22}' \vartheta_{31}' + \beta_{17} \vartheta_{31}' \vartheta_{42} \right] + \frac{1}{2} \beta_{24} \vartheta_{72}' + \frac{1}{2} i \beta_{0c} \vartheta_{72}, \tag{4.101f}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{lm0-2}^{(2)} = & \frac{1}{2} \left[ \beta_{00} \vartheta_{11} \vartheta_{12} + \beta_{01} \vartheta_{21} \vartheta_{22} + \beta_{20} \vartheta_{21}' \vartheta_{22}' + \beta_{03} \vartheta_{41} \vartheta_{42} + (\beta_{0a} + \beta_{0b}) \vartheta_{64} \right] \\
 & + \frac{1}{4} \left[ \beta_{10} (\vartheta_{12} \vartheta_{21}' + \vartheta_{11} \vartheta_{22}') + \beta_{21} \vartheta_{31}'^2 + \beta_{16} (\vartheta_{22}' \vartheta_{41} + \vartheta_{21}' \vartheta_{42}) - \beta_{02} \vartheta_{31}'^2 \right. \\
 & \left. + \beta_{06} (\vartheta_{11} \vartheta_{42} + \vartheta_{12} \vartheta_{41}) \right] + \frac{1}{4} i \left[ \beta_{04} (\vartheta_{12} \vartheta_{21} - \vartheta_{11} \vartheta_{22}) - \beta_{15} \vartheta_{31} \vartheta_{31}' \right. \\
 & \left. + \beta_{12} (\vartheta_{21} \vartheta_{22}' - \vartheta_{21}' \vartheta_{22}) + \beta_{08} (-\vartheta_{22} \vartheta_{41} + \vartheta_{21} \vartheta_{42}) \right] - \frac{1}{2} i \beta_{23} \vartheta_{64}', \tag{4.101g}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{lm00}^{(2)} = & \frac{1}{2} \left[ \beta_{00} (\vartheta_{11}^2 + \vartheta_{12}^2) + \beta_{01} (\vartheta_{21}^2 + \vartheta_{22}^2) + \beta_{10} (\vartheta_{11} \vartheta_{21}' + \vartheta_{12} \vartheta_{22}') \right. \\
 & + \beta_{20} (\vartheta_{21}'^2 + \vartheta_{22}'^2) + \beta_{02} \vartheta_{31}'^2 + \beta_{21} \vartheta_{31}'^2 + \beta_{06} (\vartheta_{11} \vartheta_{41} + \vartheta_{12} \vartheta_{42}) \\
 & \left. + \beta_{16} (\vartheta_{21}' \vartheta_{41} + \vartheta_{22}' \vartheta_{42}) + \beta_{03} (\vartheta_{41}^2 + \vartheta_{42}^2) \right] + (\beta_{0a} + \beta_{0b}) \vartheta_{65}, \tag{4.101h}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{lm02}^{(2)} = & \frac{1}{2} \left[ \beta_{00} \vartheta_{11} \vartheta_{12} + \beta_{01} \vartheta_{21} \vartheta_{22} + \beta_{20} \vartheta_{21}' \vartheta_{22}' + \beta_{03} \vartheta_{41} \vartheta_{42} + (\beta_{0a} + \beta_{0b}) \vartheta_{64} \right] \\
 & + \frac{1}{4} \left[ \beta_{10} (\vartheta_{12} \vartheta_{21}' + \vartheta_{11} \vartheta_{22}') + \beta_{21} \vartheta_{31}'^2 + \beta_{16} (\vartheta_{22}' \vartheta_{41} + \vartheta_{21}' \vartheta_{42}) - \vartheta_{12} \vartheta_{21} \right. \\
 & \left. + \beta_{06} (\vartheta_{11} \vartheta_{42} + \vartheta_{12} \vartheta_{41}) - \beta_{02} \vartheta_{31}'^2 \right] + \frac{1}{4} i \left[ \beta_{04} (\vartheta_{11} \vartheta_{22} + \beta_{15} \vartheta_{31} \vartheta_{31}' \right. \\
 & \left. + \beta_{12} (\vartheta_{21}' \vartheta_{22} - \vartheta_{21} \vartheta_{22}') + \beta_{08} (\vartheta_{22} \vartheta_{41} - \vartheta_{21} \vartheta_{42}) \right] + \frac{1}{2} i \beta_{23} \vartheta_{64}', \tag{4.101i}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{lm1-2}^{(2)} = & \frac{1}{4} \left[ \beta_{05} \vartheta_{12} \vartheta_{31} + \beta_{14} \vartheta_{22}' \vartheta_{31} + \beta_{13} \vartheta_{22} \vartheta_{31}' + \beta_{09} \vartheta_{31} \vartheta_{42} \right] + \frac{1}{2} \beta_{24} \vartheta_{72}' \\
 & + \frac{1}{4} i \left[ -\beta_{07} \vartheta_{22} \vartheta_{31} + \beta_{11} \vartheta_{12} \vartheta_{31}' + \beta_{22} \vartheta_{22}' \vartheta_{31}' + \beta_{17} \vartheta_{31}' \vartheta_{42} \right] + \frac{1}{2} i \beta_{0c} \vartheta_{72}, \tag{4.101j}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{lm10}^{(2)} = & \frac{1}{4} \left[ \beta_{05} \vartheta_{31} (\vartheta_{11} - \vartheta_{12}) + \beta_{14} \vartheta_{31} (\vartheta_{21}' - \vartheta_{22}') + \beta_{13} \vartheta_{31}' (\vartheta_{21} + \vartheta_{22}) \right. \\
 & \left. + \beta_{09} \vartheta_{31} (\vartheta_{41} - \vartheta_{42}) \right] + \frac{1}{4} i \left[ \beta_{07} \vartheta_{31} (\vartheta_{22} - \vartheta_{21}) + \beta_{11} \vartheta_{31}' (\vartheta_{11} + \vartheta_{12}) \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \beta_{22}\vartheta'_{31}(\vartheta'_{21} + \vartheta'_{22}) + \beta_{17}\vartheta'_{31}(\vartheta_{41} + \vartheta_{42}) \Big] + \frac{1}{2}i\beta_{0c}\vartheta_{73} + \frac{1}{2}\beta_{24}\vartheta'_{73}, \quad (4.101k)$$

$$\begin{aligned} Z_{lm12}^{(2)} = & -\frac{1}{4} \left[ \beta_{05}\vartheta_{11}\vartheta_{31} + \beta_{14}\vartheta'_{21}\vartheta_{31} - \beta_{13}\vartheta_{21}\vartheta'_{31} + \beta_{09}\vartheta_{31}\vartheta_{41} \right] + \frac{1}{2}\beta_{24}\vartheta'_{71} \\ & + \frac{1}{4}i \left[ \beta_{07}\vartheta_{21}\vartheta_{31} + \beta_{11}\vartheta_{11}\vartheta'_{31} + \beta_{22}\vartheta'_{21}\vartheta'_{31} + \beta_{17}\vartheta'_{31}\vartheta_{41} \right] + \frac{1}{2}i\beta_{0c}\vartheta_{71}, \end{aligned} \quad (4.101l)$$

$$\begin{aligned} Z_{lm2-2}^{(2)} = & -\frac{1}{4} \left[ \beta_{00}\vartheta_{12}^2 - \beta_{01}\vartheta_{22}^2 + \beta_{20}\vartheta_{22}'^2 + \beta_{03}\vartheta_{42}^2 + \beta_{10}\vartheta_{12}\vartheta'_{22} + \beta_{06}\vartheta_{12}\vartheta_{42} \right. \\ & \left. + \beta_{16}\vartheta'_{22}\vartheta_{42} \right] + \frac{1}{4}i \left[ \beta_{04}\vartheta_{12}\vartheta_{22} + \beta_{12}\vartheta_{22}\vartheta'_{22} + \beta_{08}\vartheta_{22}\vartheta_{42} \right] \\ & + \frac{1}{2}(\beta_{0a} + \beta_{0b})\vartheta_{63} + \frac{1}{2}i(\beta_{23}\vartheta'_{63} + \beta_{0d}\vartheta_{83}), \end{aligned} \quad (4.101m)$$

$$\begin{aligned} Z_{lm20}^{(2)} = & -\frac{1}{4} \left[ \beta_{10}(\vartheta_{12}\vartheta'_{21} + \vartheta_{11}\vartheta'_{22}) + \beta_{06}(\vartheta_{12}\vartheta_{41} + \vartheta_{11}\vartheta_{42}) + \beta_{16}(\vartheta'_{22}\vartheta_{41} + \vartheta'_{21}\vartheta_{42}) \right] \\ & + \frac{1}{4}i \left[ \beta_{04}(\vartheta_{12}\vartheta_{21} - \vartheta_{11}\vartheta_{22}) + \beta_{12}(\vartheta'_{21}\vartheta_{22} + \vartheta_{21}\vartheta'_{22}) + \beta_{08}(\vartheta_{22}\vartheta_{41} + \vartheta_{21}\vartheta_{42}) \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[ -\beta_{00}\vartheta_{11}\vartheta_{12} + \beta_{01}\vartheta_{21}\vartheta_{22} - \beta_{20}\vartheta'_{21}\vartheta'_{22} + (\beta_{0a} + \beta_{0b})\vartheta_{62} - \beta_{03}\vartheta_{41}\vartheta_{42} \right] \\ & + \frac{1}{2}i(\beta_{23}\vartheta'_{62} + \beta_{0d}\vartheta_{82}), \end{aligned} \quad (4.101n)$$

$$\begin{aligned} Z_{lm22}^{(2)} = & -\frac{1}{4} \left[ \beta_{00}\vartheta_{11}^2 - \beta_{01}\vartheta_{21}^2 + \beta_{20}\vartheta_{21}'^2 + \beta_{03}\vartheta_{41}^2 \right] + \frac{1}{2}(\beta_{0a} + \beta_{0b})\vartheta_{61} \\ & + \frac{1}{4}i \left[ \beta_{04}\vartheta_{11}\vartheta_{21} + \beta_{12}\vartheta_{21}\vartheta'_{21} + \beta_{08}\vartheta'_{21}\vartheta_{41} \right] + \frac{1}{2}i(\beta_{23}\vartheta'_{61} + \beta_{0d}\vartheta_{81}). \end{aligned} \quad (4.101o)$$

### 3. 波形展开与数值设定

#### 3.1 波形展开

##### 3.1.1 波形快照

根据上一节中计算的频谱和分裂振幅, (4.77)式可表示为离散模式的求和, 单个小黑洞的引力波形为:

$$h_+ - ih_\times = -\frac{\mu}{r} \sum_{lmwv} \frac{S_{lmwv}(\theta)}{\omega_{mwv}^2} \left[ Z_{lm}^{(0)} + Z_{lmwv}^{(1)}d + Z_{lmwv}^{(2)}d^2 \right] e^{-i\omega_{mwv}(t-r_*)+im\varphi}, \quad (4.102)$$

其中  $S_{lmwv}(\theta) \equiv {}_{-2}S_{lm}^{awmwv}(\theta)$ 。对于另一个小黑洞, 由于假设两黑洞质量相等且采用(4.3)式描述其内轨道运动, 其波形可通过改变  $d$  的符号获得。

将两个小黑洞的波形叠加, 得到总波形:

$$h_+ - ih_\times = -\frac{2\mu}{r} \sum_{lmwv} \frac{S_{lmwv}(\theta)}{\omega_{mwv}^2} \left[ Z_{lm}^{(0)} + Z_{lmwv}^{(2)}d^2 + \mathcal{O}(d^4) \right] e^{-i\omega_{mwv}(t-r_*)+im\varphi}, \quad (4.103)$$

由于假设 IB 为等质量圆形轨道, 所有奇数阶项相互抵消。然而, 目前推导的是理想瞬时波形, 即 b-EMRI 的轨道参数未演化 (例如外半径  $p$  保持恒定)。若考虑引力波辐射 (如下节所述),

轨道参数将发生演化，导致波形相位在  $M/\sqrt{\varepsilon}$  时间尺度上偏离无演化的情形 [93]。

### 3.1.2 adiabatic 近似下的演化波形

在第三章第3.2.2小节中，我们推导了 EMRI 在 adiabatic 近似下无穷远处和视界处的能流  $\dot{\mathcal{E}}^{\infty/H}$ ，角动量流  $\dot{\mathcal{L}}_z$  和 Carter 常数流  $\dot{Q}$ 。对于 b-EMRI 的情形，我们直接套用这些结果，只不过对  $lmkn$  的求和在此处应替换为  $lmwv$ 。对于赤道面轨道的 OB，Carter 常数流为零，因此我们只需要计算  $\dot{\mathcal{E}} = -\dot{\mathcal{E}}^H - \dot{\mathcal{E}}^\infty$  和  $\dot{\mathcal{L}}_z = -\dot{\mathcal{L}}_z^H - \dot{\mathcal{L}}_z^\infty$ 。既然已知每个时刻的能量  $\mathcal{E}(t)$  和角动量  $\mathcal{L}_z(t)$ ，我们可以推导出：

$$\dot{p} \equiv \frac{dp}{dt} = q_1 \dot{\mathcal{E}} + q_2 \dot{\mathcal{L}}_z, \quad (4.104)$$

其中  $q_1$  和  $q_2$  是  $\mathcal{E}$ 、 $\mathcal{L}_z$  和  $p$  的函数，这两个函数的推导如下：由于“圆轨道在辐射反应 (radiation reaction) 过程中保持圆形” [160–163]，根据(3.10b)式定义的  $r$  方向测地线方程，我们有  $\dot{R} = 0$  和  $\dot{R}' = 0$ 。前者将能量和角动量流与赤道圆轨道的性质联系起来：

$$\frac{\dot{\mathcal{E}}}{\dot{\mathcal{L}}_z} = \frac{M^{1/2}}{aM^{1/2} + p^{3/2}} = \frac{u^\varphi}{u^t}. \quad (4.105)$$

后者给出了  $q_1$  和  $q_2$  的表达式：

$$q_1 = -\frac{2[2\mathcal{E}p^3 - aM\mathcal{L}_z + a^2\mathcal{E}(M+p)]}{a^2(\mathcal{E}^2 - 1) - \mathcal{L}_z^2 + 6p[M + (\mathcal{E}^2 - 1)p]}, \quad (4.106a)$$

$$q_2 = -\frac{2[\mathcal{L}_z(M-p) - aM\mathcal{E}]}{a^2(\mathcal{E}^2 - 1) - \mathcal{L}_z^2 + 6p[M + (\mathcal{E}^2 - 1)p]}. \quad (4.106b)$$

现在我们已经得到了  $p = p(t)$  的演化，可以计算 adiabatic 波形

$$h_+ - ih_\times = \frac{\mu}{r} \sum_{lm} H_{lm}(t, \theta, \varphi) e^{-i\Phi_m(t)}, \quad (4.107)$$

其中

$$H_{lm}(t, \theta, \varphi) = -\frac{2S_{lm}(t, \theta)}{[\omega_m(t)]^2} Z_{lm}^{(0)}(t) e^{im\varphi}, \quad (4.108a)$$

$$\Phi_m(t) = \int_0^t \omega_m(t') dt'. \quad (4.108b)$$

这里所有包含  $p$  的项都成为  $t$  的函数。相位项是累积的，因此需要积分。需要注意的是，上述 adiabatic 波形中我们仅包含了零阶模式  $Z_{lm}^{(0)}$ ，并没有将  $Z_{lmwv}^{(2)}$  包含进去。这是因为，振幅的修正项其实很难从波形中分辨出来，它们的存在主要影响的是系统的演化，因此只要在计算能流和角动量流时包含它们即可。

### 3.2 数值计算的设定

我们的 b-EMRI 波形中有三个关键频率：

$$\Omega_G \equiv \frac{u^\varphi}{u^t}, \quad \Omega_P \equiv \frac{\Omega}{u^t}, \quad \Omega_I \equiv \frac{\omega_{\text{IB}}}{u^t}. \quad (4.109)$$

特别地，测地线频率  $\Omega_G$  和进动频率  $\Omega_P$  量级相近，而 IB 的频率  $\Omega_I$  则显著高于前两者。例如，当参数取值为  $a = 0.9M$ 、 $p = 10M$ 、 $\varepsilon = 10^{-5}$  和  $d = 4000\mu$  时，可得  $\Omega_G = 0.0307/M$ 、 $\Omega_P = -0.0268/M$  以及  $\Omega_I = 0.3344/M$ 。

由(4.87)、(4.89)和(4.91)式给出的频谱具有如下一般形式：

$$\omega_{m\omega\nu} = m\Omega_G + w\Omega_P + v\Omega_I. \quad (4.110)$$

值得注意的是，对于  $v = \pm 2$  的二阶展开  $Z_{lm\omega\nu}^{(2)}$ ，频率可达  $\omega \sim \mathcal{O}(1/M)$  量级。在此高频区域，使用传统 MST 方法 [164–167] 计算齐次 Teukolsky 径向解  $R_{lm}^{\text{in/up}}$  将面临挑战。

为解决高频计算问题，我们转而采用 Sasaki-Nakamura (SN) 方法 [122]，该方法在高频区域具有更平滑高效的计算性能。在前面的第二章第5节中，我们已经详细介绍了 SN 方法的具体细节，有需要的读者可以自行回顾。数值计算  $R_{lm}^{\text{in/up}}$  时，我们使用 Rico K. L. Lo 的 Julia 包 GeneralizedSasakiNakamura.jl [109]。此外，我们使用 SpinWeightedSpheroidalHarmonics.jl 包来计算 SWSH 及其特征值。基于这些工具包，我们可以求出振幅  $Z_{lm}^{(0)}$ 、 $Z_{lm\omega\nu}^{(1)}$  和  $Z_{lm\omega\nu}^{(2)}$ 。

根据(4.103)式计算波形时，理论上需要无限多个模式。实际计算中， $l = 2$  模式已能捕捉波形的主要特征。虽然包含更高阶  $l$  模式可提升精度，但当截断模式数  $l_{\text{max}} = 10$  时，相对误差已低于  $10^{-6}$ ； $l_{\text{max}} = 15$  时更可降至  $10^{-11}$  量级。为平衡计算效率与精度，本文在计算能流时取  $l_{\text{max}} = 10$ （参见 [26]），而在绘制波形时仅取  $l_{\text{max}} = 5$ 。

为演化外轨道，我们选取从初始半径  $p_{\text{init}} = 10.0M$  至最内稳定圆轨道 (ISCO) 附近 [102] 的网格点。当  $a = 0.9M$  时，ISCO 位于  $p = 2.32M$  附近，计算终止于  $p_{\text{final}} = 2.35M$  以避免系统在 ISCO 附近快速从旋近过渡到坠落的复杂过程。网格间距按以下规律选取：

$$\Delta p(/M) = 0.05 \tanh(p - p_{\text{final}}) + 0.001. \quad (4.111)$$

该方案在  $p_{\text{init}} = 10.0M$  至  $p_{\text{final}} = 2.35M$  间生成 214 个网格点。

在每个网格点计算能流和角动量流  $\dot{\mathcal{E}}(p)$  与  $\dot{\mathcal{L}}_z(p)$ ，通过(4.104)式获得  $\dot{p}$  的离散值。对于非网格点处的  $\dot{p}(p)$ ，采用三次样条插值 [168] 计算旋进阶段的数值解。随后数值积分(4.104)式重构  $p(t)$  的演化关系，将  $p(t)$  代入(4.107)和(4.108)式即可获得 adiabatic 波形。需特别说明，为避免瞬态共振效应 [169, 170]，我们排除了满足  $\omega_{m\omega\nu} < \Omega_G + \Omega_P$  的模式。



## 第五章 结果展示与讨论

本章内容主要出自本人发表的文章：

**Yucheng Yin**, Josh Mathews, Alvin J. K. Chua, Xian Chen. Relativistic model of binary extreme-mass-ratio inspiral systems and their gravitational radiation. **PhysRevD.111.103007** [155]

### 1. 结果

#### 1.1 超大质量黑洞 QNM 的激发

根据上一章中的计算，一阶振幅相互抵消后剩余：

$$Z_{lmwv}^{\text{in}} = Z_{lm}^{(0)} + Z_{lmwv}^{(2)} d^2 = \begin{cases} Z_{lm}^{(0)} + Z_{lm00}^{(2)} d^2 & w = v = 0, \\ Z_{lmwv}^{(2)} d^2 & . \end{cases} \quad (5.1)$$

当  $w = v = 0$  时，能流正比于：

$$\left| Z_{lm00}^{\text{in}} \right|^2 = \left| Z_{lm}^{(0)} \right|^2 + \left( Z_{lm}^{(0)} \bar{Z}_{lm00}^{(2)} + \bar{Z}_{lm}^{(0)} Z_{lm00}^{(2)} \right) d^2 + \left| Z_{lm00}^{(2)} \right|^2 d^4, \quad (5.2)$$

而当  $w \neq 0$  或  $v \neq 0$  时：

$$\left| Z_{lmwv}^{\text{in}} \right|^2 = \left| Z_{lmwv}^{(2)} \right|^2 d^4. \quad (5.3)$$

l	m	$\left  Z_{lm}^{(0)} \right $	$\left  Z_{lm00}^{(2)} \right  \cdot d^2$	$A_{lm00}$
2	2	$1.03 \times 10^{-3}$	$3.74 \times 10^{-8}$	$3.63 \times 10^{-5}$
3	3	$5.19 \times 10^{-4}$	$2.32 \times 10^{-8}$	$4.47 \times 10^{-5}$
4	4	$2.59 \times 10^{-4}$	$1.40 \times 10^{-8}$	$5.40 \times 10^{-5}$
5	5	$1.26 \times 10^{-4}$	$8.05 \times 10^{-8}$	$6.40 \times 10^{-5}$
6	6	$5.95 \times 10^{-5}$	$4.44 \times 10^{-9}$	$7.45 \times 10^{-5}$
7	7	$2.76 \times 10^{-5}$	$2.36 \times 10^{-9}$	$8.53 \times 10^{-5}$
8	8	$1.26 \times 10^{-5}$	$1.22 \times 10^{-9}$	$9.64 \times 10^{-5}$

表 5.1 主要模式的零阶与二阶振幅及其比值，参数取  $a = 0.9M$ 、 $p = 10M$ 、 $\varepsilon = 10^{-5}$ 、 $d = 4000\mu$ 、 $\tilde{\varphi} = \pi/4$  和  $\tilde{\theta} = \pi/3$ 。

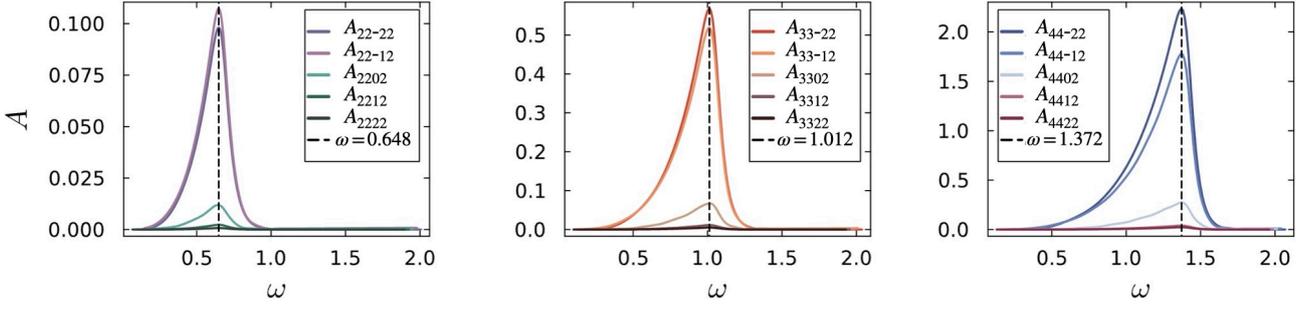


图 5.1 放大因子  $A_{22w2}$ 、 $A_{33w2}$  和  $A_{44w2}$  ( $w = 0, \pm 1, \pm 2$ ) 随频率  $\omega$  的变化曲线。峰值出现在： $l = m = 2$  模式  $\omega = 0.648/M$  处， $l = m = 3$  模式  $\omega = 1.012/M$  处， $l = m = 4$  模式  $\omega = 1.372/M$  处。

首先考虑  $v = 0$  的模式。此时振幅的领头阶修正项为  $\sim \mathcal{O}(d^2)$  量级。我们定义放大因子：

$$A_{lmwv}(\omega) = \frac{|Z_{lmwv}^{(2)}|d^2}{|Z_{lm}^{(0)}|} \quad (5.4)$$

来量化修正项的相对重要性。表 5.1 展示了  $v = 0$  时主要模式的振幅及其对应首阶修正项。可以得出结论： $A_{lm00} \sim \varepsilon$ 。理解这一关系需注意，虽然修正项正比于  $d^2$ ，但 IB 直径  $d$  的量级为数千  $\mu$ ，故有  $d^2 = (\text{数千 } M\varepsilon)^2 \approx M^2\varepsilon$ 。

l	m	$\omega_{lm0}^{\text{QNM}}(M)$	$\omega_{lm}^{\text{peak}}(M)$
2	2	0.672-0.0649i	0.648
3	3	1.045-0.0655i	1.012
4	4	1.410-0.0662i	1.372

表 5.2 QNM 的主音频率与  $l = m = 2, 3, 4$  模式峰值频率对比。

当  $v = \pm 2$  (高频模式) 时，放大因子显著增大，尤其在频率接近超大质量黑洞的 QNM 频率时。图 5.1 展示了  $A_{lmwv}$  对频率  $\omega$  的依赖关系 (参数与表 5.1 相同)，在相应 QNM 模式附近出现明显峰值。表 5.2 给出了峰值对应频率，同时列出通过 qnm.py 包 [171] 计算的 QNM 频率作为对比。值得注意的是，峰值频率略低于主导 QNM 频率的实部，该特征与 Cardoso 2021 中图 2 结果高度一致 [75]，被解释为 QNM 的共振激发现象。

值得注意的是， $v = \pm 2$  高频模式对应的  $A_{lmwv}$  在某些情况下可接近 1。这些二阶相对振幅比低频模式大  $\varepsilon^{-1}$  倍。此外，每个  $m$  值对应十个高频模式 ( $w = 0, \pm 1, \pm 2, v = \pm 2$ )，使得能流密度进一步被放大。如此强的高频模式能流将导致 b-EMRI 系统比标准 EMRI 演化更快。我们注意到，如果采用 MPD 方程研究 b-EMRI 演化 [76] (见其式 (30))，也会发现推导出两个高频模式，但其作者在计算能流时忽略了这些项，这可能导致其 b-EMRI 演化速率被低估。

但我们需要提醒读者的是：b-EMRI 通过与超大质量黑洞 QNM 共振导致演化加速，是基于假设通过(5.3)得到的能流和角动量流全部来自外轨道，而不影响内轨道的演化，这一点将在本章2节着重讨论。

### 1.2 b-EMRI 波形可视化

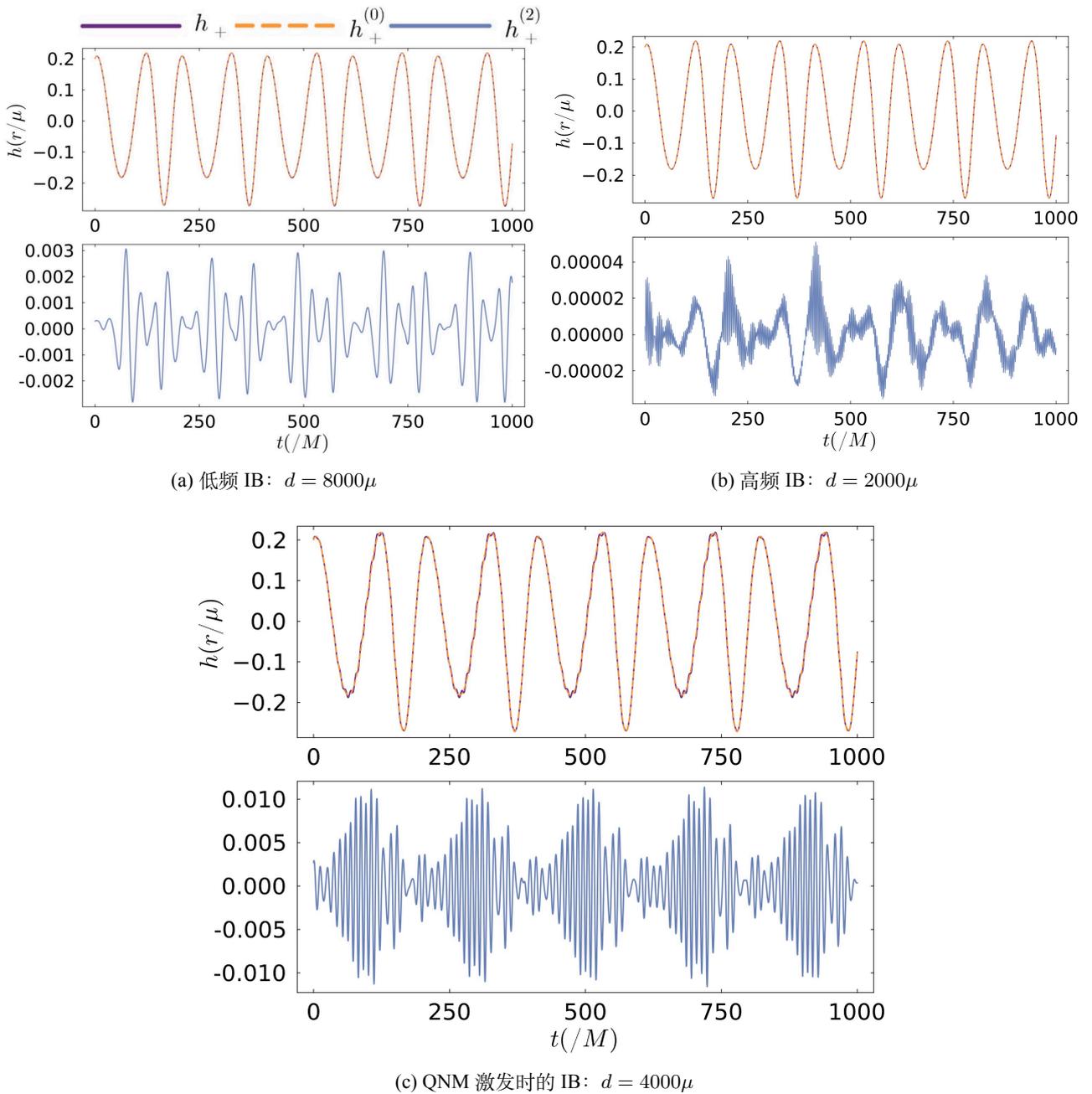


图 5.2 不同  $d$  取值下的波形快照，固定参数为  $a = 0.9M$ 、 $p = 10M$ 、 $\varepsilon = 10^{-5}$ 、 $\tilde{\varphi} = \pi/4$ 、 $\tilde{\theta} = \pi/3$ ，观测角度取  $\theta = \pi/3$  和  $\varphi = \pi/6$ 。

为更清晰地展示高频模式的重要性，我们计算了不同设置下对应的能流：

$$\dot{\mathcal{E}}^{\infty(0)} = \sum_{l=2}^{10} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{4\pi\omega_m^2} |Z_{lm}^{(0)}|^2, \quad (5.5a)$$

$$\dot{\mathcal{E}}^{\infty(1)} = \sum_{l=2}^{10} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{4\pi\omega_m^2} |Z_{lm}^{(0)} + Z_{lm00}^{(2)}d^2|^2, \quad (5.5b)$$

$$\dot{\mathcal{E}}^{\infty(2)} = \sum_{l=2}^{10} \sum_{m=lv} \frac{1}{4\pi\omega_{mrv}^2} |Z_{lm}^{(0)} + Z_{lmrv}^{(2)}d^2|^2, \quad (5.5c)$$

其中截断数取  $l_{\max} = 10$ 。此处  $\dot{\mathcal{E}}^{\infty(0)}$  代表标准 EMRI 的能流， $\dot{\mathcal{E}}^{\infty(1)}$  包含 Jiang 2024 中讨论的低频修正项 [76]，而  $\dot{\mathcal{E}}^{\infty(2)}$  则计入高频模式的贡献。同时计算了流向视界的能流  $\dot{\mathcal{E}}^{H(0)}$ 、 $\dot{\mathcal{E}}^{H(1)}$  和  $\dot{\mathcal{E}}^{H(2)}$ ，所有结果列于表5.3。

$p/M$	$d/\mu$	$\dot{\mathcal{E}}^{\infty(0)}/(\epsilon^2)$	$\dot{\mathcal{E}}^{\infty(1)}/(\epsilon^2)$	$\dot{\mathcal{E}}^{\infty(2)}/(\epsilon^2)$	$\dot{\mathcal{E}}^{H(0)}/(\epsilon^2)$	$\dot{\mathcal{E}}^{H(1)}/(\epsilon^2)$	$\dot{\mathcal{E}}^{H(2)}/(\epsilon^2)$
10	2000	$5.04909 \times 10^{-5}$	$5.04969 \times 10^{-5}$	$1.40386 \times 10^{-4}$	$-1.43895 \times 10^{-6}$	$-1.43910 \times 10^{-6}$	$1.10771 \times 10^{-3}$
10	4000	$5.04909 \times 10^{-5}$	$5.04945 \times 10^{-5}$	$7.01751 \times 10^{-5}$	$-1.43895 \times 10^{-6}$	$-1.43903 \times 10^{-6}$	$2.12752 \times 10^{-5}$
10	6000	$5.04909 \times 10^{-5}$	$5.04937 \times 10^{-5}$	$5.31631 \times 10^{-5}$	$-1.43895 \times 10^{-6}$	$-1.43901 \times 10^{-6}$	$-1.44617 \times 10^{-6}$
10	8000	$5.04909 \times 10^{-5}$	$5.04934 \times 10^{-5}$	$5.08327 \times 10^{-5}$	$-1.43895 \times 10^{-6}$	$-1.43902 \times 10^{-6}$	$-1.44713 \times 10^{-6}$
8	2000	$1.46335 \times 10^{-4}$	$1.46352 \times 10^{-4}$	$1.98487 \times 10^{-4}$	$-7.51153 \times 10^{-6}$	$-7.51229 \times 10^{-6}$	$5.96528 \times 10^{-4}$
8	4000	$1.46335 \times 10^{-4}$	$1.46346 \times 10^{-4}$	$1.58943 \times 10^{-4}$	$-7.51153 \times 10^{-6}$	$-7.51195 \times 10^{-6}$	$2.16421 \times 10^{-6}$
8	6000	$1.46335 \times 10^{-4}$	$1.46344 \times 10^{-4}$	$1.47468 \times 10^{-4}$	$-7.51153 \times 10^{-6}$	$-7.51192 \times 10^{-6}$	$-7.46815 \times 10^{-6}$
8	8000	$1.46335 \times 10^{-4}$	$1.46343 \times 10^{-4}$	$1.46488 \times 10^{-4}$	$-7.51153 \times 10^{-6}$	$-7.51200 \times 10^{-6}$	$-7.51337 \times 10^{-6}$
6	2000	$5.65865 \times 10^{-4}$	$5.65934 \times 10^{-4}$	$5.90544 \times 10^{-4}$	$-6.04253 \times 10^{-5}$	$-6.04311 \times 10^{-5}$	$3.84389 \times 10^{-4}$
6	4000	$5.65865 \times 10^{-4}$	$5.65910 \times 10^{-4}$	$5.71402 \times 10^{-4}$	$-6.04253 \times 10^{-5}$	$-6.04289 \times 10^{-5}$	$-5.81383 \times 10^{-5}$
6	6000	$5.65865 \times 10^{-4}$	$5.65903 \times 10^{-4}$	$5.66266 \times 10^{-4}$	$-6.04253 \times 10^{-5}$	$-6.04294 \times 10^{-5}$	$-6.04366 \times 10^{-5}$
6	8000	$5.65865 \times 10^{-4}$	$5.65900 \times 10^{-4}$	$5.65955 \times 10^{-4}$	$-6.04253 \times 10^{-5}$	$-6.04311 \times 10^{-5}$	$-6.04320 \times 10^{-5}$
4	2000	$3.59721 \times 10^{-3}$	$3.59767 \times 10^{-3}$	$3.60627 \times 10^{-3}$	$-7.76063 \times 10^{-4}$	$-7.76124 \times 10^{-4}$	$-6.75433 \times 10^{-4}$
4	4000	$3.59721 \times 10^{-3}$	$3.59753 \times 10^{-3}$	$3.59869 \times 10^{-3}$	$-7.76063 \times 10^{-4}$	$-7.76120 \times 10^{-4}$	$-7.76084 \times 10^{-4}$
4	6000	$3.59721 \times 10^{-3}$	$3.59746 \times 10^{-3}$	$3.59756 \times 10^{-3}$	$-7.76063 \times 10^{-4}$	$-7.76157 \times 10^{-4}$	$-7.76162 \times 10^{-4}$
4	8000	$3.59721 \times 10^{-3}$	$3.59738 \times 10^{-3}$	$3.59742 \times 10^{-3}$	$-7.76063 \times 10^{-4}$	$-7.76221 \times 10^{-4}$	$-7.76234 \times 10^{-4}$

表 5.3 当  $a = 0.9M$ 、 $\epsilon = 10^{-5}$ 、 $\tilde{\varphi} = \pi/4$ 、 $\tilde{\theta} = \pi/3$  时，不同模式对应的能流密度

从表5.3中可以看出，b-EMRI 高频模式的贡献在早期旋近阶段尤为显著，这将导致系统演化速率快于标准 EMRI。相比之下，低频模式的贡献仅为  $\mathcal{O}(\epsilon)$  量级。角动量能流呈现相同特征，此处不再赘述。

图5.2更直观地展示了 b-EMRI 高频模式对 QNM 的共振激发。选取  $\epsilon = 10^{-5}$  并通过调整  $d$  改变总频率  $\omega$ ： $d = 8000\mu$  对应低频  $2\Omega_I = 0.236/M$ ， $d = 4000\mu$  对应激发频率  $2\Omega_I = 0.669/M$ ， $d = 2000\mu$  对应高频  $2\Omega_I = 1.892/M$ 。”激发频率”指能共振激发 QNM 的频率范围。结合图5.1和表5.2可见， $d = 4000\mu$  对应的频率正好位于  $l = m = 2$  QNM 的激发峰。

当频率处于激发带内时（图5.2(c)），二阶振幅  $h_+^{(2)}$  被显著激发至  $h_+^{(0)}$  的约 10%，导致复合波形  $h_+$  出现明显波动。反之，当频率偏离激发带（无论更低或更高），QNM 未被激发且  $h_+^{(2)}$  振幅较小。值得注意的是，图 (a) 中  $h_+^{(2)}$  的振幅大于图 (c)，这是由于  $\mathcal{O}(d^2)$  因子随  $d$  增大而增强所致。

接下来我们研究不同 Configuration 下 b-EMRI 系统的 adiabatic 演化，并与标准 EMRI 进行对比。继续采用参数  $a = 0.9M$ 、 $p = 10M$ 、 $\varepsilon = 10^{-5}$ 、 $d = 4000\mu$ 、 $\tilde{\varphi} = \pi/4$  和  $\tilde{\theta} = \pi/3$ ，并沿用(5.5)式定义的三种不同的能流计算方式。(5.5a)式对应标准 EMRI 演化，(5.5b)式表示仅含低频模式的 b-EMRI 演化（记为“Configuration 1”），(5.5c)式包含全部模式（记为“Configuration 2”）。

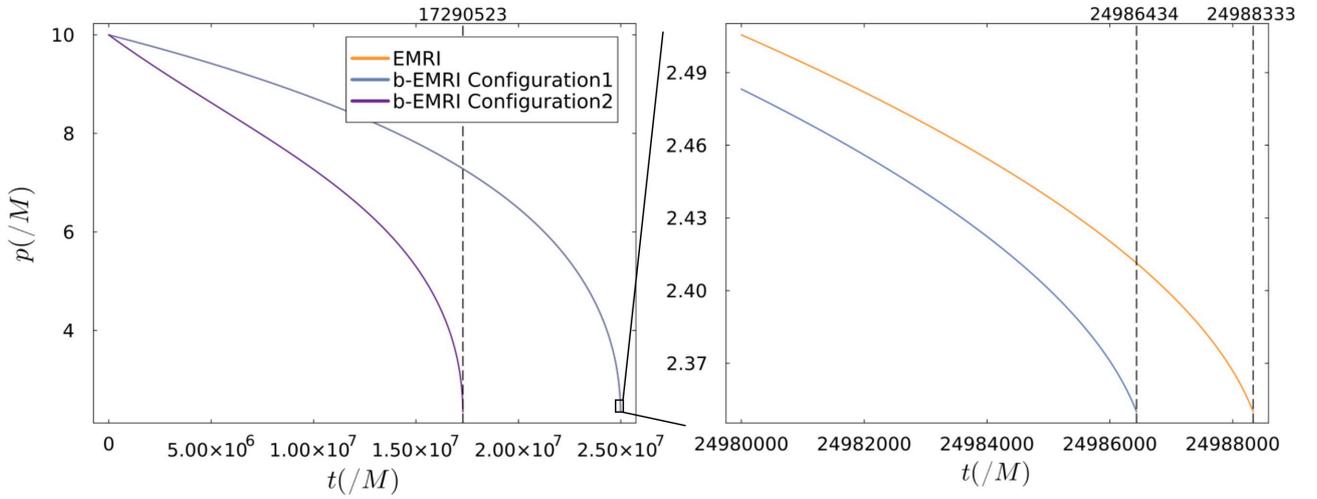
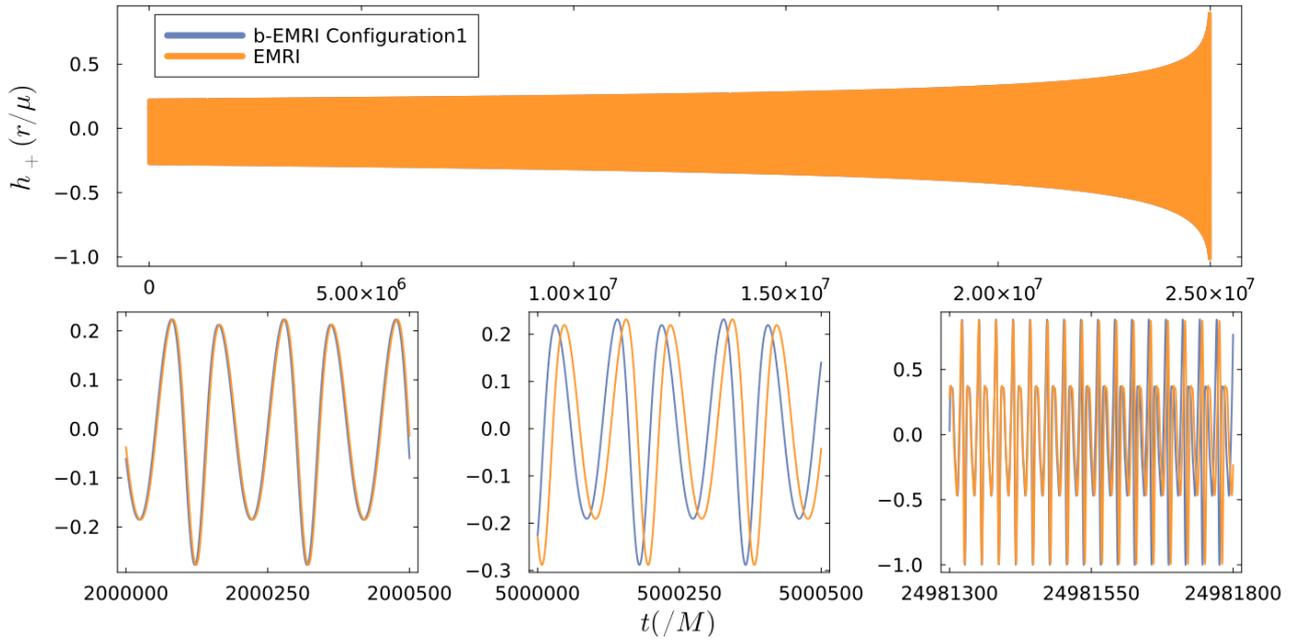


图 5.3 三种 Configuration 下外轨道半径  $p$  的演化轨迹。左图展示长期演化，右图聚焦 EMRI 和 b-EMRI Configuration1 演化的最终阶段。

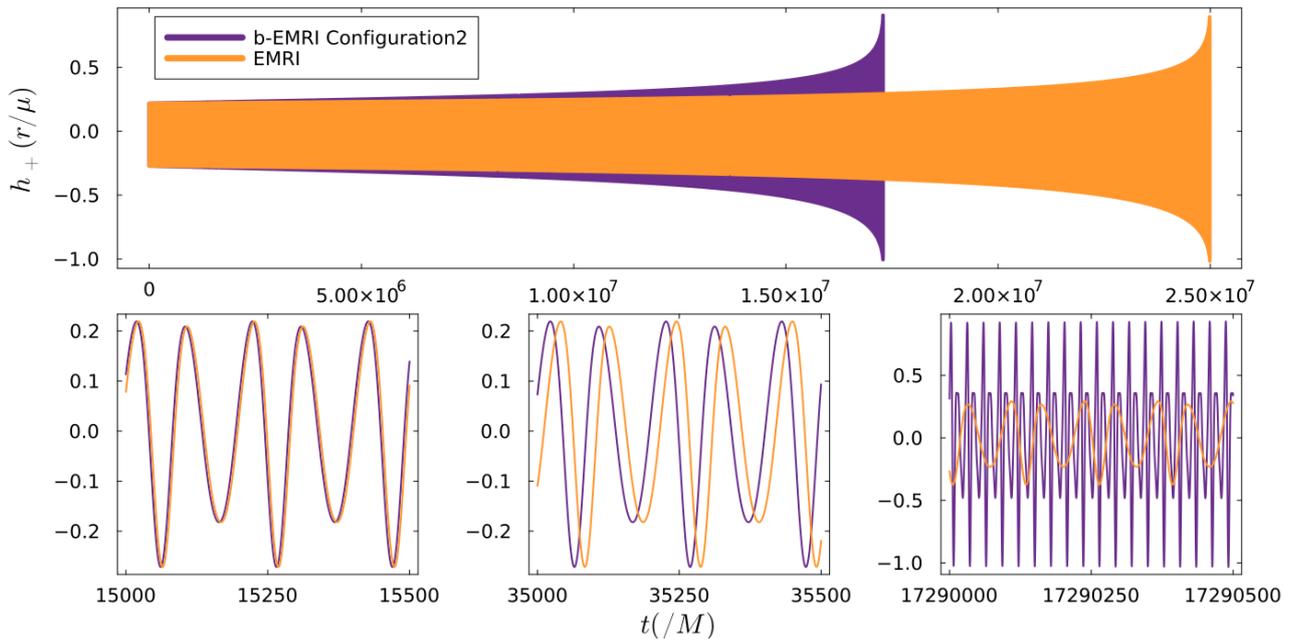
图5.3展示了参数  $p$  的演化过程。在所选参数下，计入高频模式时 b-EMRI 系统从  $p_{\text{init}} = 10M$  演化至  $p_{\text{final}} = 2.35M$  所需时间为标准 EMRI 的 69%。旋进早期阶段，b-EMRI “Configuration 2” 的演化速度显著快于标准 EMRI 和 b-EMRI “Configuration 1”。例如当  $M = 10^6 M_{\odot}$  时，基准模型中 EMRI 的旋进时间尺度为 3.9 年，而 b-EMRI “Configuration 2” 仅需 2.7 年。标准 EMRI 与 b-EMRI “Configuration 1” 的演化时间差较小（约  $1899M \approx 2.6$  小时）。

基于  $p(t)$  轨迹，我们进一步计算了 EMRI 和 b-EMRI 系统的 adiabatic 波形（图5.4）。当能流角动量流仅含低频模式时，标准 EMRI 与 b-EMRI 波形在经过约  $5 \times 10^4$  个外轨道周期后开始出现相位偏离；而包含高频模式时，仅 40 个外轨道周期后即出现相位偏离。

这些结果表明高频模式对 b-EMRI 系统演化的贡献远大于低频模式，导致早期旋进阶段 b-EMRI 演化显著加速。该发现超越了当前对 b-EMRI 系统的认知——例如 Jiang 2024 的图 2 未计入高频模式贡献时 [76]，b-EMRI 演化更缓慢，这与我们图5.4(a)的结果一致。



(a) 标准 EMRI 与 Configuration 1 b-EMRI 的绝热波形对比



(b) 标准 EMRI 与 Configuration 2 b-EMRI 的绝热波形对比

图 5.4(a)(b) 上图展示从  $p_{\text{init}} = 10M$  到  $p_{\text{final}} = 2.35M$  演化过程中，标准 EMRI（橙色曲线）与不同 b-EMRI Configuration（蓝色和紫色曲线）的完整 adiabatic 波形；下图三组子图分别显示演化初期、中期和末期的相位偏离（dephasing）进程。

我们还发现高频模式的影响随  $p$  减小而减弱，这可能是由于辐射反应导致平均外圆轨道产生更高频模式，其强度可与 b-EMRI 的  $d^2$  项模式相当。因此 b-EMRI 波形的关键特征是早期旋近阶段演化更快，随着  $p$  减小逐渐趋近标准 EMRI 速率，该特性或可用于区分 b-EMRI 与标准 EMRI 系统。

## 2. 讨论

### 2.1 与现有模型的对比

本节我们将当前研究结果与三篇前人工作 [75, 76, 83] 进行对比。首个基于黑洞微扰论的 b-EMRI 波形出自 Cardoso 2021 [75]，虽然该研究对微扰源项进行了简化（仅含单一频率），但已揭示微扰可共振激发中心 SMBH 的 QNM。该研究定义的激发比率

$${}_s\mathcal{R}_{lm} = {}_s\dot{E}_{lm} / {}_s\dot{E}_{Nlm}, \quad (5.6)$$

用于追踪 IB 高频运动激发的能流。该比率随频率  $\omega$  的变化行为与我们定义的  $A_{lmwv}$  相似。例如，本文图5.1与 Cardoso 2021 的 [75] 图 2 均显示：峰值位置  $\omega_{lm}^{\text{peak}}$  略小于 QNM 频率实部  $\omega_{lm0}^{\text{QNM}}$ ，且曲线在峰值左侧较平缓而右侧较陡峭。

理解上述现象需从 QNM 本质出发。在第二章第6节中，我们知道 QNM 是齐次 Teukolsky 径向方程 ((2.149)式) 满足无穷远纯出射和视界纯入射条件的解。根据这些解，当  $\omega = \omega_{lm0}^{\text{QNM}}$  时，(2.195)式中的渐近振幅  ${}_2R_{lm}^{\text{in,inc}}$  将趋于零，导致 Wronskian 行列式  $\mathcal{W}_{lm}(\omega)$  为零，使得振幅  $Z_{lmwv}^{(2)}$  发散。但由于  $\omega_{lm0}^{\text{QNM}}$  为复频率而 b-EMRI 频率  $\omega_{mwv}$  为实频率，系统无法实现  ${}_2R_{lm}^{\text{in,inc}} = 0$  的严格条件，这种失配导致有限峰值的出现。

Jiang 2024 将 IB 视为质量分布并通过多极矩展开计算源项 [76]，采用 MPD 方程描述 SMBH 周围轨道演化。该方法保证能动张量守恒，启发了我们在下一节对模型有效性的讨论。但该研究因频率超出 LISA 探测波段而忽略了高频源项，而我们的结果表明这些被舍弃的高频模式若与 SMBH 的 QNM 共振将显著增强能量耗散。值得注意的是，该工作允许 IB 演化甚至合并，使 b-EMRI 成为可产生 LIGO/Virgo 高频与 LISA 低频引力波的多波段源 [52]，IB 合并导致的突然质量损失更增强了低频波形的可辨识度，这些多波段观测特性未在本文讨论。

除此之外，Meng 2024 采用“Numerical Kludge”模板生成 b-EMRI 波形 [83]，其 OB 为一般轨道且 IB 具有偏心率，增强了模型现实性。但小黑洞轨迹仍通过内外轨道运动的代数组合获得，无法完全处理强引力区(三体)引力波源的相对论效应。有趣的是，其中展示的波形快照同样呈现 IB 引起的强调制现象，但这种调制源于 IB 轨道运动（其直径  $d$  与 OB 尺寸相当）而非 QNM 激发。如此大的 IB 将引发三体系统稳定性问题，我们将在下节讨论。

## 2.2 b-EMRI 的潮汐稳定性与参数空间

本文中我们假设 IB 不发生演化，即既不受潮汐力破坏也不被激发至高偏心率。层级三体系统的稳定性是经典问题 [172]，在牛顿引力下 IB 的最大稳定距离由希尔半径  $R_H := (\varepsilon/3)^{1/3}p$  决定。由于我们工作在强引力区，需满足  $d < \eta \cdot R_H$  ( $0 < \eta < 1$ )。  $\eta$  的确定需考虑相对论性三体动力学，详见本组前成员张中府师兄的工作 [86] 及最新研究 [70]。以  $\eta = 1/3$  为例，当  $p = 10M$ 、 $\varepsilon = 10^{-5}$  时， $d < 0.05M$ ，故  $d = 4000\mu = 0.04M$  的 IB 是稳定的。此外，由于假设 IB 遵循牛顿运动， $d$  需足够大以避免强相对论修正（设  $d > 1000\mu = 1000M\varepsilon$ ），其主导的后牛顿效应量级  $\mathcal{O}(\mu\sqrt{\mu/d^3}) \sim 10^{-6}$  可忽略。且 IB 因引力波辐射的演化时标远大于 OB，故本文不作考虑。

另一关键假设是 IB 为圆轨道。但三体系统中的动力学效应（如 Kozai-Lidov 机制 [173, 174]）在内外轨道倾角  $\tilde{\theta}$  超过临界值时会激发 IB 偏心率 [70]。偏心 Kozai-Lidov 机制 (EKM) 时标由 [175, 176] 给出：

$$\tau_{\text{EKM}} = \frac{256\sqrt{10}}{15\pi\sqrt{\epsilon_{\text{oct}}}} t_{\text{sec}}, \quad (5.7)$$

其中

$$t_{\text{sec}} = \frac{\sqrt{M_C d}}{\Phi_0}, \quad (5.8a)$$

$$\epsilon_{\text{oct}} = \frac{d}{p} \frac{e}{1-e^2}, \quad (5.8b)$$

$$\Phi_0 = \frac{Md^2}{p^3(1-e^2)^{3/2}}, \quad (5.8c)$$

$M_C = \mu/4$  为 IB 约化质量， $e$  为 OB 偏心率参数。假设 OB 近圆 ( $e \ll 1$ )，将(5.8)式代入(5.7)式得：

$$\tau_{\text{EKM}} = \frac{128\sqrt{10}}{15\pi} \frac{(1-e^2)^2}{\sqrt{e}} \tilde{p}^{7/2} \tilde{d}^{-2} \varepsilon^{-3/2} M, \quad (5.9)$$

$\tilde{p} \equiv p/M$ ， $\tilde{d} \equiv d/\mu$ 。为保证 IB 长期保持圆轨道，要求  $\tau_{\text{EKM}} > 2\pi \times 10^4/\Omega_g$ （即 IB 维持圆形至少  $10^4$  个外轨道周期），该时标足以产生图5.4所示的 b-EMRI 与 EMRI 显著相位差。下文分析取  $e = 0.1$  为例。

图5.5展示了同时满足希尔条件  $d < R_H/3$  和 EKM 条件  $\tau_{\text{EKM}} > 2\pi \times 10^4/\Omega_g$  的参数空间。可见较大  $p$ （如  $\tilde{p} = 20$ ）时希尔条件主导并限制  $d$  上限；较小  $p$  时 EKM 条件更重要。图中红星所示基准模型参数在  $p \geq 10M$  时同时满足两条件。

需指出，即使 IB 存在偏心率，只要其轨道频率与 QNM 频率匹配，QNM 共振激发仍成立。技术上可通过 Fourier 展开将偏心轨道视为一系列圆轨道叠加，前述分析仍适用。

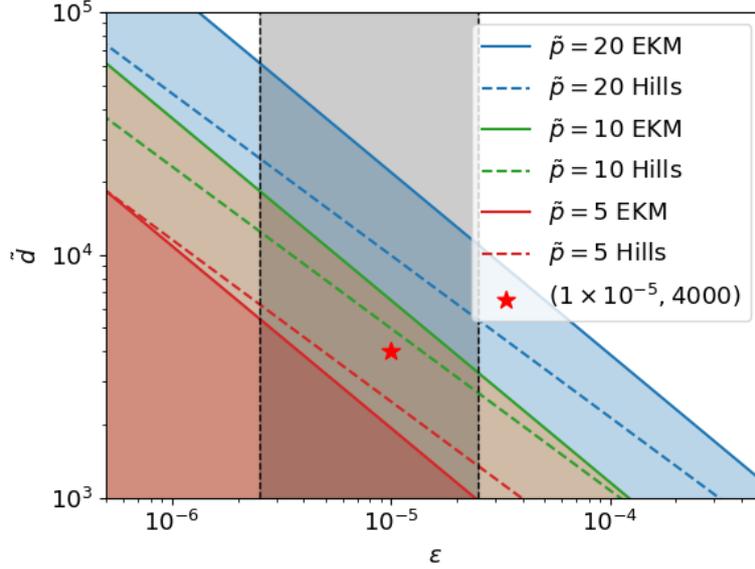


图 5.5 b-EMRI 参数空间。实线(虚线)下方区域满足  $\tilde{p} = 20, 10, 5$  时的 EKM(希尔)条件。灰色阴影区表示  $10M_{\odot} < \mu < 100M_{\odot}$  的 IB 质量范围(设  $M = 4 \times 10^6 M_{\odot}$ )。红星标记基准模型参数  $\varepsilon = 10^{-5}, \tilde{d} = 4000$ 。

### 2.3 本工作中 b-EMRI 模型的有效性

在上一章第3.1.2小节中,我们展示了如何“quasi-adiabatically”地追踪系统演化,特别是基于 OB 的密切测地线运动推导参数  $p$  的演化。然而,本工作遵循与 [75,84] 中对源项的处理相同,将 IB 的能动张量表示为:

$$T^{\mu\nu}(x) = m_1 \int d\tau \frac{\delta^{(4)}[x - z_1(\tau)]}{\sqrt{-g(x)}} \frac{dz_1^\mu(\tau)}{d\tau} \frac{dz_1^\nu(\tau)}{d\tau} + m_2 \int d\tau \frac{\delta^{(4)}[x - z_2(\tau)]}{\sqrt{-g(x)}} \frac{dz_2^\mu(\tau)}{d\tau} \frac{dz_2^\nu(\tau)}{d\tau}, \quad (5.10)$$

其中  $m_1 = m_2 = \mu/2$ ,  $z_{1,2}^\mu$  为(4.7)式给出的两个小黑洞在 BL 坐标系中的轨迹。该  $T^{\mu\nu}$  缺失了 IB 两个小黑洞内部相互作用的能量和角动量信息——由于我们独立于能动张量构建 IB 的背景运动,若不考虑它们内部的相互作用项,则无法保证其守恒性。对于等质量 IB,有  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} \propto \mu d^2$ , 这意味着我们在波形振幅和旋进演化中保留的同阶项存在缺失。下面我们将展示如何构建双单极粒子相互作用对应的能动张量的修正项,加入此项后能动量将在模型截断阶数内严格守恒,从而保证该阶数下的完全相对论性。

在考虑扩展致密天体的运动时,通常需要指定其多极矩结构和质心位置,这决定了能动张量的结构。运动方程则通过能动量守恒导出——这正是 Mathisson-Papapetrou-Dixon 方程的处理方法。本工作采用逆向逻辑:先构建两条类点粒子世界线,描述等质量天体在牛顿引力下圆轨道上的运动(其质心自由下落),再补充保证能动量守恒所需的相互作用项。

在 FFF 坐标系  $\tilde{x}^\alpha = (\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  中, 度规可近似为闵氏度规  $\eta_{\alpha\beta}$  加上  $\mathcal{O}(\tilde{x}^\alpha \tilde{x}^\beta)$  量级的修正  $h_{\alpha\beta}$ 。IB 中每个天体的世界线为:

$$z_i^\mu = \left[ \tau, (-1)^i \frac{d}{2} \cos \omega_{\text{IB}} \tau, 0, (-1)^i \frac{d}{2} \sin \omega_{\text{IB}} \tau \right]. \quad (5.11)$$

定义  $\dot{z}_i^\mu = \frac{dz_i^\mu}{d\tau}$ , 并利用世界线切矢的类时归一化条件可得:

$$\frac{d\tau}{d\tau_i} = \left[ 1 - h_{\tilde{t}\tilde{t}}|_{z_i} - \left( \frac{d\omega_{\text{IB}}}{2} \right)^2 \right]^{-2} + \mathcal{O}(d^3). \quad (5.12)$$

单极项为

$$T_i^{\mu\nu} = m_i \int \left( \frac{d\tau}{d\tau_i} \right)^2 \dot{z}_i^\mu \dot{z}_i^\nu \frac{\delta^4(\tilde{x}^\alpha - z_i^\alpha)}{\sqrt{-g}} d\tau_i \quad (5.13)$$

单独使用时并不守恒。通过分部积分和 delta 函数展开, 可导出守恒条件要求:

$$\sum_i \nabla_\nu T_i^{\mu\nu} \doteq -\mu \int \dot{z}_i^\mu z_i^\alpha \partial_\alpha \delta^3(\tilde{x}^a) \frac{\delta(\tilde{t} - \tau)}{\sqrt{-g}} d\tau + \mathcal{O}(\mu d^3). \quad (5.14)$$

引入投影算符  $P^\mu{}_\nu \equiv \delta^\mu{}_\nu - \tilde{t}^\mu \tilde{t}_\nu$  后, 构造相互作用项:

$$T_{\text{Int}}^{\mu\nu} \doteq -\mu \omega_{\text{IB}}^2 \int P^\mu{}_\alpha z_i^\alpha P^\nu{}_\beta z_i^\beta \frac{\delta^4(\tilde{x}^\alpha - z_c^\alpha)}{\sqrt{-g}} d\tau + \mathcal{O}(\mu d^3), \quad (5.15)$$

其中  $z_c^\alpha \doteq \tau \tilde{t}^\alpha$  为质心世界线。该式亦可等价表示为:

$$T_{\text{Int}}^{\mu\nu} \doteq -\mu \omega_{\text{IB}}^2 \int (z_i^\mu - z_c^\mu)(z_i^\nu - z_c^\nu) \frac{\delta^4(\tilde{x}^\alpha - z_c^\alpha)}{\sqrt{-g}} d\tau + \mathcal{O}(\mu d^3), \quad (5.16)$$

其迹可用 Sygne 世界函数简洁表示。最终守恒的能动张量为:

$$T^{\mu\nu} = \mu \int \dot{z}_i^\mu \dot{z}_i^\nu \frac{\delta^4(\tilde{x}^\alpha - z_c^\alpha)}{\sqrt{-g}} d\tau + T_{\text{Int}}^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\mu d^3). \quad (5.17)$$

值得注意的是, 相互作用项的形式与牛顿点粒子转动能  $\mu \omega_{\text{IB}}^2 r^2$  有深刻关联。当  $d \rightarrow 0$  时, 系统退化为自由单极粒子。对于更一般的非等质量偏心 IB 情况, 可通过对 Lagrangian 的变分法来构造能动张量 [88, 89]。

尽管当前求解 Teukolsky 方程时未包含此相互作用项, 但我们指出后续工作使用同样的展开方法将其加入振幅的表达式。最值得注意的一点是, 我们的工作中假设引力波带走的能流和角动量流完全来自 OB 的轨道能量和轨道角动量。IB 轨道频率与超大质量黑洞 QNM 频率的匹配是否会影响 IB 本身的动力学还尚未可知。通过本小节对能动张量的补充, 我们可以看到计算轨道演化时忽略的项应当与  $Z_{lm\nu\nu}^{(2)}$  有着相同的量级。若该项也与背景 Kerr 时空的 QNM 产生共振, 则 IB 本身的引力辐射可能也会被大大增强, 这将导致 IB 加速并和, 则我们的模型可以平滑地过渡到 Jiang 2024 [76] 中考虑的情形 (IB 接近并和), 因此两种方法或许需要联合起来使用。以上想法都将成为我们下一步的研究方向。

### 3. 结论

在本工作中，我们采用相对论性坐标变换对 **b**-EMRI 中两个恒星质量黑洞的轨道运动进行建模。通过这种方法，我们推导出 Teukolsky 方程中源项的展开，从而能够运用黑洞微扰论计算 **b**-EMRI 的引力波形。从 *FFF* 到 *BL* 坐标系的坐标变换会在 Teukolsky 方程源项中同时引入低频和高频微扰：

- 产生 6 个与内轨道双星间距  $d$  成正比的附加模式
- 产生 15 个与  $d^2$  成正比的附加模式

虽然我们采用等质量 **IB** 的假设导致线性  $d$  项波形贡献相互抵消，但对于更一般的双星质量比的情况，本方法的适用性不会受到实质影响。

研究结果证实了高频微扰会共振激发中心超大质量黑洞的准正则模，这与 Cardoso 2021 [75] 的首次发现一致。我们进一步分析了模式激发的条件，并将 QNMs 有限振幅的成因归结为微扰的实频率与 QNM 复频率之间的失配。本工作最重要的发现是：当 QNMs 被激发时，**b**-EMRIs 的演化速度会快于具有相同内乘参数 ( $M$ 、 $a$ 、 $p$ 、 $\epsilon$ ) 的标准 EMRIs，这是因为被激发的 QNMs 增强了外轨道能量和角动量的耗散，但正如上一节末尾提到的，这一结论基于内轨道不发生演化的强假设。

未来研究可从两个方向拓展：

- 扩展模型以考虑 **IB** 内部相互作用的能动张量，使之适用于更广泛的天体物理场景，如：
  - 引入外轨道的偏心率 (符合 **b**-EMRIs 形成模型 [51, 52])
  - 动态演化的内轨道 (如 [86] 中所述)
- 研究 **b**-EMRIs 与常规 EMRIs 的可区分性。虽然 Jiang 2024 [76] 和 Meng 2024 [83] 已开展相关研究，但我们的模型揭示了 **b**-EMRIs 的新特征——特别是与外轨道半径  $p$  相关的特征，表现为 **b**-EMRI 系统在早期旋进阶段演化更快，随后逐渐收敛至标准 EMRI 演化轨迹。



## 第六章 后续进展

在本章中，我将介绍两个不同于 b-EMRI 波形计算的问题，分别为 Sasaki-Nakamura 形式的应用和 Kerr 黑洞对引力波的散射。它们是本人完成 b-EMRI 波形论文 [155] 后（2024 年 10 月至 2025 年 5 月）重点关注的问题。由于相关结果尚未发表，因此只对这两个领域已有的工作进行回顾并简要介绍本人正在进行的工作。

### 1. Sasaki-Nakamura 形式的应用

#### 1.1 Teukolsky 方程 Green 函数的发散与正规化方案

在(3.95)式下方，我们曾经提到过推导径向非齐次 Teukolsky 方程 Green 函数时忽略的一个重要问题：积分边界的发散问题。为了更好地看出问题所在，我们取一个任意类时轨道上的粒子，其轨迹甚至可以是纯数值的，例如  $t(\tau), r(\tau), \theta(\tau), \varphi(\tau)$ 。也可以是解析的，例如测地线轨迹  $D^2 z^\mu / D\tau^2 = 0$  或由 self-force 驱动的旋进轨迹  $D^2 z^\mu / D\tau^2 = qF_1^\mu + q^2 F_2^\mu + \mathcal{O}(q^3)$ 。

对于一般粒子轨迹，(3.136)式定义的  $C_{ab}$  分量可以表示为

$$C_{nn} = \frac{\Delta^2 \mathcal{N}^2}{4\Sigma^3}, \quad C_{\bar{m}n} = \frac{\bar{\rho} \Delta \mathcal{N} \mathcal{M}}{2\sqrt{2}\Sigma^2}, \quad C_{\bar{m}\bar{m}} = \frac{\bar{\rho}^2 \mathcal{M}^2}{2\Sigma}, \quad (6.1)$$

其中

$$\mathcal{N} = u^t + \frac{\Sigma}{\Delta} u^r - a \sin^2 \theta u^\varphi, \quad \mathcal{M} = ia \sin \theta u^t + \Sigma u^\theta - i(r^2 + a^2) \sin \theta u^\varphi. \quad (6.2)$$

考虑到测地轨道 4 速度在  $r \rightarrow \infty$  时的渐进行为为  $u^t \sim u^r \sim \mathcal{O}(1)$  和  $u^\theta \sim u^\varphi \sim \mathcal{O}(r^{-2})$ ，我们有  $\mathcal{N} \sim \mathcal{M} \sim \mathcal{O}(1)$  以及  $C_{nn} \sim \mathcal{O}(r^{-2})$ ， $C_{\bar{m}n} \sim \mathcal{O}(r^{-3})$ ， $C_{\bar{m}\bar{m}} \sim \mathcal{O}(r^{-4})$ 。

将所有渐进行为代入  $\mathcal{T}_{lm\omega}(r)$  的表达式(3.142)，可以看到  $\mathcal{T}_{lm\omega}(r' \rightarrow \infty) \sim \mathcal{O}[r'^2/r(t)]$ 。分母上的  $r(t)$  量纲来源于 Delta 函数的维度特性。

$$[\delta(x)] = \frac{1}{[x]}. \quad (6.3)$$

而径向齐次 Teukolsky 方程的解(2.195)在无穷远处以  $\sim r^3$  发散。因此，

$$\left[ \frac{R_{lm\omega}^{\text{in/up}}(r')}{\Delta^{l^2}} \mathcal{T}_{lm\omega}(r') \right] \sim \mathcal{O}[r'/r(t)], \quad r' \rightarrow \infty. \quad (6.4)$$

当对  $r'$  进行积分时, 由于 Delta 函数的存在, 我们取  $r' \rightarrow r(t) \sim r_0$  的值。因此当  $r(t) \rightarrow \infty$  时, 振幅  $Z_{lm}^{(0)}(r_0, \omega) \sim \mathcal{O}[r(t)] \sim \mathcal{O}(r_0)$  的整体值与  $r_0$  (源与 Kerr 黑洞之间的距离) 呈线性发散关系。此处假设  $\omega$  独立于  $r$ , 为振幅的一个参数。图6.1展示了这个发散及其存在的普遍性。

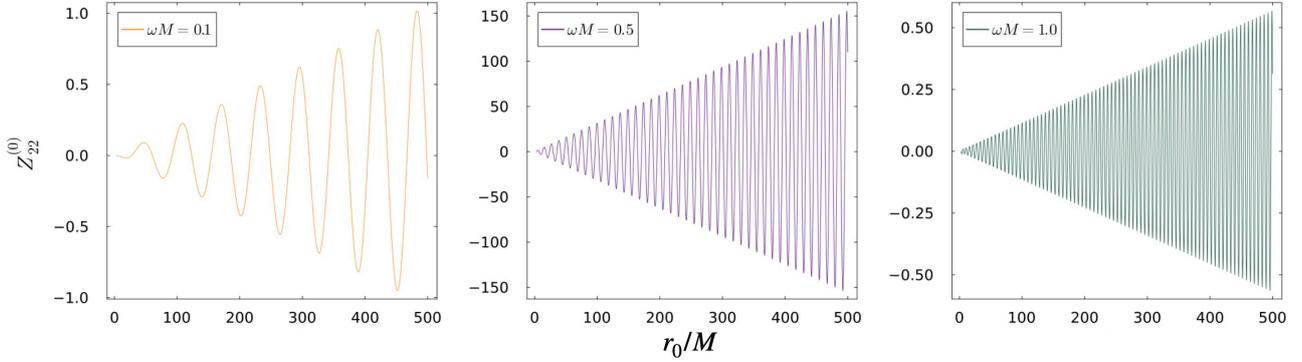


图 6.1 径向非齐次 Teukolsky 方程 Green 函数积分(4.86)实部对于  $\omega M = 0.1, 0.5, 1.0$  的线性发散。

历史上, 第一个避免发散问题的方案就是 Sasaki 和 Nakamura 与 1981 年提出的 Sasaki-Nakamura 变换 [122], 他们通过一系列变换重构了 Teukolsky 方程。变换后的新 Sasaki-Nakamura 方程具有短程有效势和收敛的源项积分。

此外, Poisson 于 1997 年指出 Teukolsky 方程本身没有问题, 发散源于 Green 函数的不正确使用 [138]。当积分存在发散边界时, 正确的 Green 函数应为

$$R_{lm\omega}(r) = \frac{R_{lm\omega}^{\text{up}}(r)}{\mathcal{W}_{lm\omega}} \left[ B + \int_b^r \frac{R_{lm\omega}^{\text{in}}(r')}{\Delta'^2} \mathcal{T}_{lm\omega}(r') dr' \right] + \frac{R_{lm\omega}^{\text{in}}(r)}{\mathcal{W}_{lm\omega}} \left[ C + \int_r^c \frac{R_{lm\omega}^{\text{up}}(r')}{\Delta'^2} \mathcal{T}_{lm\omega}(r') dr' \right]. \quad (6.5)$$

通过分部积分, 将边界  $b = r_+$  和  $c = \infty$  处的不定积分吸收到常数  $B$  和  $C$  中。虽然 Poisson 的工作基于 Schwarzschild 时空 (其中  $b = 2M$ ), 但该方法很快被推广到 Kerr 时空 [177]。

在 Srivastava 2021 中 [178], 正规化方案从  $\psi_4$  推广到  $\psi_0$  以研究事件视界附近的引力回波。他们没有采用 Poisson 的方法, 而是使用了另一种方案: 通过将非齐次 Teukolsky 方程按发散因子 (在视界的情况下是  $\Delta$ ) 展开为级数, 分别分离出发散部分和收敛部分。

**发散解耦法简介:** 这个方法最早出自 Tashiro & Ezawa 1981 [179], 其第二次被使用是在 40 年后的 Srivastava 2021 [178]。但我们并不直接重复其中的推导, 与中直接对  $t$  积分不同, 我们首先展开源项(3.143)。发现所有  $A$  项的渐进行为均为  $A \sim \mathcal{O}(r^{-2})$ 。将非齐次 Teukolsky

方程(3.90)左右两边分别记为  $\alpha$  和  $\beta$ 。可将  $\alpha$  展开为

$$\alpha = \mu \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t - im\varphi(t)} \left\{ \left[ \frac{\alpha_{20}}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \right] \delta(r - r(t)) + \left[ \left( \frac{\alpha_{21}}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \right) \delta(r - r(t)) \right]_{,r} \right. \\ \left. + \left[ \left( \frac{\alpha_{22}}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \right) \delta(r - r(t)) \right]_{,rr} \right\} \quad (6.6)$$

我们构建一个名为  $R_{lm\omega}^A(r)$  的试探解来抵消  $\alpha$  中的  $\mathcal{O}(r^{-2})$  项。定义算子

$$\hat{F} \equiv \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{\Delta} \frac{d}{dr} \right) - \frac{\mathcal{V}_{lm\omega}(r)}{\Delta^2}, \quad (6.7)$$

则试探解满足

$$\hat{F} [R_{lm\omega}^A(r)] = \mu \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t - im\varphi(t)} \left\{ \frac{\alpha_{20}}{r^2} \delta(r - r(t)) \right. \\ \left. + \left[ \frac{\alpha_{21}}{r^2} \delta(r - r(t)) \right]_{,r} + \left[ \frac{\alpha_{22}}{r^2} \delta(r - r(t)) \right]_{,rr} \right\}. \quad (6.8)$$

微分算子的渐进行为为

$$\hat{F} \rightarrow \frac{\partial_r^2 + \omega^2}{r^2} + \frac{2(M\partial_r^2 - \partial_r + 3M\omega^2 - 4i\omega)}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right). \quad (6.9)$$

这表明  $R_{lm\omega}^A(r) \sim \mathcal{O}(r^0)$  在无穷远处。因此可构造新源项

$$\frac{\tilde{\mathcal{T}}_{lm\omega}(r)}{\Delta^2} = \frac{\mathcal{T}_{lm\omega}(r)}{\Delta^2} - \hat{F} [R_{lm\omega}^A(r)]. \quad (6.10)$$

通解可表示为

$$R_{lm\omega}(r) = R_{lm\omega}^A(r) + \tilde{R}_{lm\omega}(r), \quad (6.11)$$

使得

$$\hat{F} [\tilde{R}_{lm\omega}(r)] = \frac{\tilde{\mathcal{T}}_{lm\omega}(r)}{\Delta^2}. \quad (6.12)$$

现在 Green 函数积分收敛，可安全地写成

$$\tilde{R}_{lm\omega}(r) = \frac{R_{lm\omega}^{\text{up}}(r)}{\mathcal{W}_{lm\omega}} \int_{r_+}^r R_{lm\omega}^{\text{in}}(r') \frac{\tilde{\mathcal{T}}_{lm\omega}(r')}{\Delta'^2} dr' + \frac{R_{lm\omega}^{\text{in}}(r)}{\mathcal{W}_{lm\omega}} \int_r^{\infty} R_{lm\omega}^{\text{up}}(r') \frac{\tilde{\mathcal{T}}_{lm\omega}(r')}{\Delta'^2} dr'. \quad (6.13)$$

无穷远处的渐进解为

$$R_{lm\omega}(r \rightarrow \infty) \sim R_{lm\omega}^A(r \rightarrow \infty) + \frac{r^3 e^{i\omega r_*}}{\mathcal{W}_{lm\omega}} \int_{r_+}^{\infty} R_{lm\omega}^{\text{in}}(r') \frac{\tilde{\mathcal{T}}_{lm\omega}(r')}{\Delta'^2} dr'. \quad (6.14)$$

可见第一项为  $\mathcal{O}(r^0)$  量级，第二项为  $\mathcal{O}(r^3)$  量级可传播至无穷远。

这个方法虽然能够帮助我们解决 Green 函数积分的发散问题，但实践证明它很难被推广，因此我们转向一个更通用且容易推广的方法：直接解非齐次 Sasaki-Nakamura 方程。

## 1.2 非齐次 Sasaki-Nakamura 方程的解法

很多文章中都根据其要解决的文同对解的形式进行了推导, 包括这里为了方便, 再次给出 Teukolsky 方程的源函数的表示, 我们从(3.142)式开始

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{lm\omega}(r) = & \sqrt{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} e^{-im\varphi(t)} \times \left\{ -2\mathcal{L}_1^\dagger \left[ \rho^{-4} \mathcal{L}_2^\dagger (S\rho^3) \right] \frac{C_{nn}}{\rho^2\bar{\rho}} \delta[r - \tilde{r}(t)] \right. \\
& - \sqrt{2}\mathcal{L}_2^\dagger \left[ \rho^3 S (\rho^{-4}\bar{\rho}^2)_{,r} \right] \frac{\Delta}{\rho^2\bar{\rho}^2} C_{\bar{m}\bar{n}} \delta[r - \tilde{r}(t)] \\
& - \frac{\sqrt{2}\Delta^2\bar{\rho}^2}{\rho} \left[ \mathcal{L}_2^\dagger(S) + ia(\rho - \bar{\rho}) \sin\theta S \right] \mathcal{D}^\dagger \left[ \frac{C_{\bar{m}\bar{n}}}{\Delta\rho^2\bar{\rho}^2} \delta[r - \tilde{r}(t)] \right] \\
& \left. - \rho^3 \Delta^2 S \mathcal{D}^\dagger \left[ \rho^{-4} \mathcal{D}^\dagger \left( \rho^{-2}\bar{\rho} C_{\bar{m}\bar{m}} \delta[r - \tilde{r}(t)] \right) \right] \right\}. \tag{6.15}
\end{aligned}$$

经过 Sasaki-Nakamura 变换后的径向方程中, 其源项中的因子  $\mathcal{W}$  与  $\mathcal{T}_{lm\omega}$  之间的转换关系(2.225)式为

$$\frac{d^2\mathcal{W}}{dr^2} = -\frac{r^2}{\Delta^2} \mathcal{T}_{lm\omega}(r) \exp \left[ i \int^r \frac{K}{\Delta} d\tilde{r} \right]. \tag{6.16}$$

将  $W$  分为三部分

$$W = \frac{W_{nn}}{\sqrt{2\pi\mu}} + \frac{W_{\bar{m}\bar{n}}}{\sqrt{2\pi\mu}} + \frac{W_{\bar{m}\bar{m}}}{\sqrt{2\pi\mu}}, \tag{6.17}$$

它们分别满足

$$\frac{d^2W_{nn}}{dr^2} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega t(\tau) - im\varphi(\tau)} \frac{r^2\rho\bar{\rho}^2}{2} \mathcal{N}^2 \mathcal{L}_1^\dagger \left[ \rho^{-4} \mathcal{L}_2^\dagger (\rho^3 S) \right] \delta(r - r(\tau)) e^{i \int^r \frac{K}{\Delta} d\tilde{r}}, \tag{6.18a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2W_{\bar{m}\bar{n}}}{dr^2} = & \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega t(\tau) - im\varphi(\tau)} \left\{ \frac{r^2\bar{\rho}\mathcal{N}\mathcal{M}}{2} \mathcal{L}_2^\dagger \left[ \rho^3 S (\bar{\rho}^2\rho^{-4})' \right] \delta(r - r(\tau)) e^{i \int^r \frac{K}{\Delta} d\tilde{r}} \right. \\
& \left. + \frac{r^2\bar{\rho}^2}{\rho} \left[ \mathcal{L}_2^\dagger S + ia(\rho - \bar{\rho}) \sin\theta S \right] \mathcal{D}^\dagger \left[ \bar{\rho}\mathcal{N}\mathcal{M} \delta(r - r(\tau)) \right] e^{i \int^r \frac{K}{\Delta} d\tilde{r}} \right\}, \tag{6.18b}
\end{aligned}$$

$$\frac{d^2W_{\bar{m}\bar{m}}}{dr^2} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega t(\tau) - im\varphi(\tau)} r^2 \rho^3 S \mathcal{D}^\dagger \left[ \rho^{-4} \mathcal{D}^\dagger \left( \frac{\bar{\rho}^2 \mathcal{M}^2}{2\rho} \delta(r - r(\tau)) \right) \right] e^{i \int^r \frac{K}{\Delta} d\tilde{r}}. \tag{6.18c}$$

这里我们消去了  $C_{ab}$  分母上的  $u^t$  并把积分变量从  $t$  换成了  $\tau$ 。在这些积分表达式中,  $\tau$  只存在于  $e$  指数和  $\delta$  函数中, 其中  $r(\tau)$  表示粒子在  $r$  方向的轨迹。例如, 从无穷远处开始落入黑洞的粒子, 它的径向运动满足  $r_+ < r(\tau) < \infty$ ; 在某一圆轨道上做圆周运动的粒子 (不考虑由引力辐射造成的轨道演化), 它满足  $r(\tau) = r_0$ ; 若是椭圆轨道, 则满足  $r_{\min} \leq r(\tau) \leq r_{\max}$ 。所以我们总可以限定  $r(\tau)$  的范围。但是这里的  $W$  是  $r$  的函数而非  $r(\tau)$ , 因此这里有两种情况需要讨论: (1) 当  $r < r_{\min}$  或  $r > r_{\max}$  时, 这些积分中无论  $\tau$  取何值, 都不能使  $r(\tau)$  与  $r$  的值匹配, 此时方程右侧始终为零, 也就是  $W \equiv 0$ ; (2) 当  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$  时, 在某些  $\tau$  时刻

$r(\tau) = r$ , 使得  $W$  不为零。注意这里如果有多个  $\tau_i$  时刻的  $r(\tau_i) = r$ , 则积分结果应当是这些时刻的结果的代数和。我们再次注意到, 在之后解 Sasaki-Nakamura 方程时, 我们依然使用格林函数法, 所以要对源函数做  $\int_{r_+}^{\infty} [\bullet] dr$  的积分, 积分表达式中含有  $W$  这个因子, 积分上下限实际是  $W \neq 0$  的区间, 也就是  $\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} [\bullet] dr$ 。进一步地, 考虑所有  $r(\tau_i) = r$  处结果的贡献, 我们实际上处理的是  $\int_{-\infty}^{\infty} [\bullet] \cdot u^r d\tau$ 。也就是说, 我们把(6.18)中对  $\tau$  的积分转移到了之后格林函数法重构源函数的积分中。因此在这里, 我们可以放心地假设  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$  并将  $\int_{-\infty}^{\infty} [\bullet] d\tau$  写成  $\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} [\bullet] / u^r dr(\tau)$  的形式, 从而消去  $\delta$  函数。由于算符  $\mathcal{D}^\dagger$  中含有对  $r$  的偏导, 所以先不处理带有  $\mathcal{D}^\dagger$  的部分, 其他项可以直接积分得到

$$\frac{d^2 W_{mn}}{dr^2} = \frac{r^2 \rho \bar{\rho}^2}{2u^r} \mathcal{L}_1^\dagger \left[ \rho^{-4} \mathcal{L}_2^\dagger (\rho^3 S) \right] e^{i\chi(r)}, \quad (6.19a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_{\bar{m}n}}{dr^2} &= \frac{r^2 \bar{\rho} \mathcal{N} \mathcal{M}}{2u^r} \mathcal{L}_2^\dagger \left[ \rho^3 S (\bar{\rho}^2 \rho^{-4})' \right] e^{i\chi(r)} + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega t(\tau) - im\varphi(\tau)} \frac{r^2 \bar{\rho}^2}{\rho} \\ &\quad \times \left[ \mathcal{L}_2^\dagger S + ia(\rho - \bar{\rho}) \sin \theta S \right] \mathcal{D}^\dagger [\bar{\rho} \mathcal{N} \mathcal{M} \delta(r - r(\tau))] e^{i \int^r \frac{K}{\Delta} d\tilde{r}}, \end{aligned} \quad (6.19b)$$

$$\frac{d^2 W_{m\bar{m}}}{dr^2} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega t(\tau) - im\varphi(\tau)} r^2 \rho^3 S \mathcal{D}^\dagger \left[ \rho^{-4} \mathcal{D}^\dagger \left( \frac{\bar{\rho}^2 \mathcal{M}^2}{2\rho} \delta(r - r(\tau)) \right) \right] e^{i \int^r \frac{K}{\Delta} d\tilde{r}}, \quad (6.19c)$$

这里的

$$\chi(r) = \omega t(r) - m\varphi(r) + \int^r \frac{K}{\Delta} d\tilde{r} = \omega(t + r_*) - m \left( \varphi + \int^r \frac{a}{\Delta} d\tilde{r} \right). \quad (6.20)$$

上述方程均具有如下形式

$$\frac{d^2 f}{dr^2} = g(r) e^{ih(r)}. \quad (6.21)$$

可以通过两次分部积分以及适当的边界条件解出。这里我们知道的是  $r \rightarrow \infty$  的渐进条件, 所以积分范围是  $\int_r^{\infty} [\bullet] dr_1$ 。第一次积分得到

$$\frac{df}{dr} = \left[ \frac{df}{dr} - \frac{g(r)}{ih'(r)} e^{ih(r)} \right]_{r \rightarrow \infty} + \frac{g(r)}{ih'(r)} e^{ih(r)} + \int_r^{\infty} \left[ \frac{g(r_1)}{ih'(r_1)} \right]' e^{ih(r_1)} dr_1. \quad (6.22)$$

如果最后一个积分中的被积函数收敛,

$$\left[ \frac{g(r)}{ih'(r)} \right]' \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad (6.23)$$

那么我们可以自洽地设置边界条件

$$\frac{df}{dr} \rightarrow \frac{g(r)}{ih'(r)} e^{ih(r)}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (6.24)$$

于是

$$\frac{df}{dr} = \frac{g(r)}{ih'(r)} e^{ih(r)} + \int_r^{\infty} \left[ \frac{g(r_1)}{ih'(r_1)} \right]' e^{ih(r_1)} dr_1. \quad (6.25)$$

再次运用分部积分以及边界条件可得

$$f(r) = \frac{g(r)}{[ih'(r)]^2} e^{ih(r)} + \int_r^\infty \left[ \frac{g(r_1)}{(ih'(r_1))^2} \right]' e^{ih(r_1)} dr_1 - \int_r^\infty dr_1 \int_{r_1}^\infty \left[ \frac{g(r_2)}{ih'(r_2)} \right]' e^{ih(r_2)} dr_2. \quad (6.26)$$

对于我们要解的方程，如(6.19a)中

$$g(r) = \frac{r^2 \rho \bar{\rho}^2}{2u^r} \mathcal{N}^2 \mathcal{L}_1^\dagger \left[ \rho^{-4} \mathcal{L}_2^\dagger (\rho^3 S) \right], \quad h(r) = \chi(r). \quad (6.27)$$

可得

$$\left[ \frac{g(r)}{ih'(r)} \right]' \sim \mathcal{O}(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (6.28)$$

收敛条件没有满足，因此不能直接使用(6.26)的通解，而是要用一些代数技巧对式子进行处理。

注意到，对于任意  $r$  的函数  $f(r)$ ，有

$$\left[ f(r) e^{i\chi(r)} \right]' = f'(r) e^{i\chi(r)} + i\chi'(r) f(r) e^{i\chi(r)}, \quad (6.29)$$

其中

$$\begin{aligned} \chi'(r) &= \omega t' - m \tilde{\varphi}' + \frac{K}{\Delta} = \omega \frac{u^t}{u^r} - m \frac{u^\varphi}{u^r} + \frac{(r^2 + a^2)\omega - ma}{\Delta} \\ &= \frac{\omega}{u^r} \mathcal{N} + \left( \frac{a}{\Delta} + \varphi' \right) (a\omega \sin^2 \theta - m). \end{aligned} \quad (6.30)$$

将(6.30)代入(6.29)整理得

$$f(r) \frac{\mathcal{N}}{u^r} e^{i\chi(r)} = -\frac{i}{\omega} \left\{ \left[ f(r) e^{i\chi(r)} \right]' - [f'(r) + i\eta f(r)] e^{i\chi(r)} \right\}, \quad (6.31)$$

其中

$$\eta = (a\omega \sin^2 \theta - m) \tilde{\varphi}' = (a\omega \sin^2 \theta - m) \left( \frac{u^\varphi}{u^r} + \frac{a}{\Delta} \right). \quad (6.32)$$

观察(6.31)式左右两侧我们可以发现，这个恒等式实现了对  $f(r)$  关于  $r$  的降幂，使得我们的边界条件从  $\mathcal{O}(1)$  变为  $\mathcal{O}(r^{-1})$ ，从而得以适用。依然以(6.19a)为例，对右侧的  $\mathcal{N}$  用一次(6.31)可得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_{nn}}{dr^2} &= f_{\mathcal{N}} \frac{\mathcal{N}}{u^r} e^{i\chi(r)} \\ &= -\frac{i}{\omega} \left\{ \left[ f_{\mathcal{N}} e^{i\chi(r)} \right]' - [f'_{\mathcal{N}} + i\eta f_{\mathcal{N}}] e^{i\chi(r)} \right\}, \end{aligned} \quad (6.33)$$

其中

$$f_{\mathcal{N}} = \frac{1}{2} r^2 \rho \bar{\rho}^2 \mathcal{N} \mathcal{L}_1^\dagger \left[ \rho^{-4} \mathcal{L}_2^\dagger (\rho^3 S) \right]. \quad (6.34)$$

一次分部积分得

$$\begin{aligned}
 \frac{dW_{nn}}{dr} &= -\frac{i}{\omega} f_{\mathcal{N}}(r) e^{i\chi(r)} - \frac{i}{\omega} \int_r^\infty [f'_{\mathcal{N}}(r_1) + i\eta f_{\mathcal{N}}(r_1)] e^{i\chi(r_1)} dr_1 \\
 &= -\frac{i}{\omega} \frac{f_{\mathcal{N}}(r) u^r}{\mathcal{N}} \frac{\mathcal{N}}{u^r} e^{i\chi(r)} - \frac{i}{\omega} \int_r^\infty [f'_{\mathcal{N}}(r_1) + i\eta f_{\mathcal{N}}(r_1)] e^{i\chi(r_1)} dr_1 \\
 &= -\frac{1}{\omega^2} \left\{ \left[ \frac{f_{\mathcal{N}} u^r}{\mathcal{N}} e^{i\chi(r)} \right]' - \left[ \left( \frac{f_{\mathcal{N}} u^r}{\mathcal{N}} \right)' + i\eta \frac{f_{\mathcal{N}} u^r}{\mathcal{N}} \right] e^{i\chi(r)} \right\} \\
 &\quad - \frac{i}{\omega} \int_r^\infty [f'_{\mathcal{N}}(r_1) + i\eta f_{\mathcal{N}}(r_1)] e^{i\chi(r_1)} dr_1.
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

再次分部积分得

$$W_{nn}(r) = f_0(r) e^{i\chi(r)} + \int_r^\infty f_1(r_1) e^{i\chi(r_1)} dr_1 + \int_r^\infty dr_1 \int_{r_1}^\infty f_2(r_2) e^{i\chi(r_2)} dr_2, \tag{6.36}$$

其中

$$f_0(r) = -\frac{f_{\mathcal{N}} u^r}{\omega^2 \mathcal{N}} = -\frac{r^2 \rho \bar{\rho}^2 u^r}{2\omega^2} \mathcal{L}_1^\dagger [\rho^{-4} \mathcal{L}_2^\dagger (\rho^3 S)], \tag{6.37a}$$

$$f_1(r) = -\frac{1}{\omega^2} \left[ \left( \frac{f_{\mathcal{N}} u^r}{\mathcal{N}} \right)' + i\eta \frac{f_{\mathcal{N}} u^r}{\mathcal{N}} \right], \tag{6.37b}$$

$$f_2(r) = \frac{i}{\omega} [f'_{\mathcal{N}} + i\eta f_{\mathcal{N}}]. \tag{6.37c}$$

对于  $\mathcal{D}^\dagger$ , 我们有另一个恒等式

$$\mathcal{D}^\dagger [f(r)] \exp \left[ i \int^r \frac{K}{\Delta} d\tilde{r} \right] = \left\{ f(r) \exp \left[ i \int^r \frac{K}{\Delta} d\tilde{r} \right] \right\}'. \tag{6.38}$$

接着来处理  $W_{\bar{m}n}$ , 我们将其分为两部分

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 W_{\bar{m}n}^{(1)}}{dr^2} &= \frac{r^2 \bar{\rho} \mathcal{N} \mathcal{M}}{2u^r} \mathcal{L}_2^\dagger \left[ \rho^3 S (\bar{\rho} \rho^{-4})' \right] e^{i\chi(r)}, \\
 \frac{d^2 W_{\bar{m}n}^{(2)}}{dr^2} &= \int_{-\infty}^\infty d\tau e^{i\omega t - i m \varphi} \frac{r^2 \bar{\rho}^2}{\rho} \left[ \mathcal{L}_2^\dagger S + i a (\rho - \bar{\rho}) \sin \theta S \right] \left\{ [\bar{\rho} \mathcal{N} \mathcal{M} \delta(r - r(\tau))] e^{i \int^r \frac{K}{\Delta} d\tilde{r}} \right\}'.
 \end{aligned} \tag{6.39}$$

第一部分积分得

$$W_{\bar{m}n}^{(1)} = \frac{i}{\omega} \int_r^\infty g_{\mathcal{M}}^{(1)} e^{i\chi(r_1)} dr_1 + \frac{i}{\omega} \int_r^\infty dr_1 \int_{r_1}^\infty \left[ g_{\mathcal{M}}^{(1)'} + i\eta g_{\mathcal{M}}^{(1)} \right] e^{i\chi(r_2)} dr_2, \tag{6.40}$$

其中

$$g_{\mathcal{M}}^{(1)} = \frac{r^2 \bar{\rho} \mathcal{M}}{2} \mathcal{L}_2^\dagger \left[ \rho^3 S (\bar{\rho}^2 \rho^{-4})' \right]. \tag{6.41}$$

第二部分积分得

$$\begin{aligned}
 W_{\bar{m}n}^{(2)} &= -\frac{i}{\omega} g_{\mathcal{M}}^{(2)} e^{i\chi(r)} - \frac{i}{\omega} \int_r^\infty \left[ g_{\mathcal{M}}^{(3)} + g_{\mathcal{M}}^{(2)'} + i\eta g_{\mathcal{M}}^{(2)} \right] e^{i\chi(r_1)} dr_1 \\
 &\quad - \frac{i}{\omega} \int_r^\infty dr_1 \int_{r_1}^\infty \left[ g_{\mathcal{M}}^{(3)'} + i\eta g_{\mathcal{M}}^{(3)} \right] e^{i\chi(r_2)} dr_2
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

其中

$$g_{\mathcal{M}}^{(2)} = \frac{r^2 \bar{\rho}^2}{\rho} \mathcal{M} \left[ \mathcal{L}_2^\dagger S + ia(\rho - \bar{\rho}) \sin \theta S \right], \quad (6.43a)$$

$$g_{\mathcal{M}}^{(3)} = \mathcal{M} \left\{ \frac{r^2 \bar{\rho}^2}{\rho} \left[ \mathcal{L}_2^\dagger S + ia(\rho - \bar{\rho}) \sin \theta S \right] \right\}'. \quad (6.43b)$$

合起来表示为

$$W_{\bar{m}n}(r) = g_0(r) e^{i\chi(r)} + \int_r^\infty g_1(r_1) e^{i\chi(r_1)} dr_1 + \int_r^\infty dr_1 \int_{r_1}^\infty g_2(r_2) e^{i\chi(r_2)} dr_2, \quad (6.44)$$

其中

$$g_0(r) = -\frac{i}{\omega} g_{\mathcal{M}}^{(2)}, \quad (6.45a)$$

$$g_1(r) = -\frac{i}{\omega} \left[ -g_{\mathcal{M}}^{(1)} + g_{\mathcal{M}}^{(3)} + g_{\mathcal{M}}^{(2)'} + i\eta g_{\mathcal{M}}^{(2)} \right], \quad (6.45b)$$

$$g_2(r) = \frac{i}{\omega} \left[ \left( g_{\mathcal{M}}^{(1)} - g_{\mathcal{M}}^{(3)} \right)' + i\eta \left( g_{\mathcal{M}}^{(1)} - g_{\mathcal{M}}^{(3)} \right) \right]. \quad (6.45c)$$

对  $W_{\bar{m}\bar{m}}$  的处理则更简单，只需要用两次(6.38)即可，我们得到

$$W_{\bar{m}\bar{m}}(r) = h_0(r) e^{i\chi(r)} + \int_r^\infty h_1(r_1) e^{i\chi(r_1)} dr_1 + \int_r^\infty dr_1 \int_{r_1}^\infty h_2(r_2) e^{i\chi(r_2)} dr_2, \quad (6.46)$$

其中

$$h_0(r) = \frac{r^2 \bar{\rho}^2 S \mathcal{M}^2}{2\rho^2 u^r}, \quad (6.47a)$$

$$h_1(r) = \left[ \left( \frac{r^2}{\rho} \right)' + \frac{(r^2 \rho^3)'}{\rho^4} \right] \frac{\bar{\rho}^2 S \mathcal{M}^2}{2\rho u^r}, \quad (6.47b)$$

$$h_2(r) = \left[ \frac{(r^2 \rho^3)'}{\rho^4} \right]' \frac{\bar{\rho}^2 S \mathcal{M}^2}{2\rho u^r}. \quad (6.47c)$$

总结一下，

$$W_{nn}(r) = f_0(r) e^{i\chi(r)} + \int_r^\infty f_1(r_1) e^{i\chi(r_1)} dr_1 + \int_r^\infty dr_1 \int_{r_1}^\infty f_2(r_2) e^{i\chi(r_2)} dr_2, \quad (6.48a)$$

$$W_{\bar{m}n}(r) = g_0(r) e^{i\chi(r)} + \int_r^\infty g_1(r_1) e^{i\chi(r_1)} dr_1 + \int_r^\infty dr_1 \int_{r_1}^\infty g_2(r_2) e^{i\chi(r_2)} dr_2, \quad (6.48b)$$

$$W_{\bar{m}\bar{m}}(r) = h_0(r) e^{i\chi(r)} + \int_r^\infty h_1(r_1) e^{i\chi(r_1)} dr_1 + \int_r^\infty dr_1 \int_{r_1}^\infty h_2(r_2) e^{i\chi(r_2)} dr_2, \quad (6.48c)$$

其中

$$f_0(r) = -\frac{f_{\mathcal{N}} u^r}{\omega^2 \mathcal{N}}, \quad (6.49a)$$

$$f_1(r) = -\frac{1}{\omega^2} \left[ \left( \frac{f_{\mathcal{N}} u^r}{\mathcal{N}} \right)' + i\eta \frac{f_{\mathcal{N}} u^r}{\mathcal{N}} \right], \quad (6.49b)$$

$$f_2(r) = \frac{i}{\omega} [f'_{\mathcal{N}} + i\eta f_{\mathcal{N}}], \quad (6.49c)$$

$$g_0(r) = -\frac{i}{\omega} g_{\mathcal{M}}^{(2)}, \quad (6.49d)$$

$$g_1(r) = -\frac{i}{\omega} \left[ -g_{\mathcal{M}}^{(1)} + g_{\mathcal{M}}^{(3)} + g_{\mathcal{M}}^{(2)'} + i\eta g_{\mathcal{M}}^{(2)} \right], \quad (6.49e)$$

$$g_2(r) = \frac{i}{\omega} \left[ \left( g_{\mathcal{M}}^{(1)} - g_{\mathcal{M}}^{(3)} \right)' + i\eta \left( g_{\mathcal{M}}^{(1)} - g_{\mathcal{M}}^{(3)} \right) \right], \quad (6.49f)$$

$$h_0(r) = \frac{r^2 \bar{\rho}^4 S \mathcal{M}^2}{2\rho^2 u^r}, \quad (6.49g)$$

$$h_1(r) = \left[ \left( \frac{r^2}{\rho} \right)' + \frac{(r^2 \rho^3)'}{\rho^4} \right] \frac{\bar{\rho}^4 S \mathcal{M}^2}{2\rho u^r}, \quad (6.49h)$$

$$h_2(r) = \left[ \frac{(r^2 \rho^3)'}{\rho^4} \right]' \frac{\bar{\rho}^4 S \mathcal{M}^2}{2\rho u^r}, \quad (6.49i)$$

表达式中的

$$f_{\mathcal{N}} = \frac{1}{2} r^2 \rho \bar{\rho}^2 \mathcal{N} \mathcal{L}_1^\dagger \left[ \rho^{-4} \mathcal{L}_2^\dagger (\rho^3 S) \right], \quad (6.50a)$$

$$g_{\mathcal{M}}^{(1)} = \frac{r^2 \bar{\rho} \mathcal{M}}{2} \mathcal{L}_2^\dagger \left[ \rho^3 S (\bar{\rho}^2 \rho^{-4})' \right], \quad (6.50b)$$

$$g_{\mathcal{M}}^{(2)} = \frac{r^2 \bar{\rho}^3}{\rho} \mathcal{M} \left[ \mathcal{L}_2^\dagger S + ia (\rho - \bar{\rho}) \sin \theta S \right], \quad (6.50c)$$

$$g_{\mathcal{M}}^{(3)} = \bar{\rho} \mathcal{M} \left\{ \frac{r^2 \bar{\rho}^2}{\rho} \left[ \mathcal{L}_2^\dagger S + ia (\rho - \bar{\rho}) \sin \theta S \right] \right\}'. \quad (6.50d)$$

通过引入新变量  $\xi$  (定义为  $d\xi = \eta dr_*$ ), 非齐次 Sasaki-Nakamura 方程(2.219)可改写为

$$\left( \frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{U_{lm}}{\xi^2} \right) X_{lm\omega} = \frac{\mathcal{S}_{lm\omega}}{\xi^2}. \quad (6.51)$$

随后采用 Green 函数法构造非齐次解

$$X_{lm\omega}(\xi) = \frac{X_{lm\omega}^{\text{up}}}{\mathcal{W}_{\text{SN}}} \int_{-\infty}^{\xi} X_{lm\omega}^{\text{in}}(\xi') \mathcal{S}_{lm\omega}(\xi') d\xi' + \frac{X_{lm\omega}^{\text{in}}}{\mathcal{W}_{\text{SN}}} \int_{\xi}^{\infty} X_{lm\omega}^{\text{up}}(\xi') \mathcal{S}_{lm\omega}(\xi') d\xi', \quad (6.52)$$

其中 Wronskian 行列式  $W$  定义为

$$\mathcal{W}_{\text{SN}} = X_{lm\omega}^{\text{in}} \frac{dX_{lm\omega}^{\text{up}}}{d\xi} - X_{lm\omega}^{\text{up}} \frac{dX_{lm\omega}^{\text{in}}}{d\xi} = \mathcal{W}_{\text{T}}. \quad (6.53)$$

可以证明, 它与 Teukolsky 方程下的 Wronskian(3.121)相等。我们关注的渐进行为  $r_* \rightarrow \infty$  表现为:

$$X_{lm\omega}(r_* \rightarrow \infty) = X_{lm\omega}^{(\infty)} e^{i\omega r_*}, \quad (6.54)$$

其中

$$\begin{aligned}
X_{lm\omega}^{(\infty)} &= \frac{c_0}{\mathcal{W}_{\text{SN}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_{lm\omega}^{\text{in}}(r_*) \mathcal{S}_{lm\omega}(r_*)}{\eta} dr_* \\
&= \frac{c_0}{\mathcal{W}_{\text{SN}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_{lm\omega}^{\text{in}}(r_*) \Delta}{(r^2 + a^2)^{3/2} r^2} \exp \left[ -i \int^r \frac{K}{\Delta} d\tilde{r} \right] W(r_*) dr_* \\
&= \frac{c_0}{\mathcal{W}_{\text{SN}}} \int_{r_+}^{\infty} \frac{X_{lm\omega}^{\text{in}}(r)}{r^2 \sqrt{r^2 + a^2}} \exp \left[ -i \int^r \frac{K}{\Delta} d\tilde{r} \right] W(r) dr.
\end{aligned} \tag{6.55}$$

这样我们就得到 Sasaki-Nakamura 方程的完整解，从上式中我们也可以看出，Green 函数积分中的被积函数以  $\sim \mathcal{O}[W(r)/r^3]$  收敛，并且通过对  $W(r)$  的求解可知，其发散速度不慢于  $\sim \mathcal{O}(r^2)$ ，因此 Green 函数积分是收敛的，整套理论不需要进行正规化。

**Annotated Bibliography:** 在这一套直接求解非齐次 Sasaki-Nakamura 方程的方法已经在很多文章中被推导，但使用它们的主要还是日本学者，如 Kojima & Nakamura 1983 [180]，Shibata 1993 [181]，Saijo 1998 [182]，以及最近的 Sago & Tanaka 2020 [183] 和 Watarai 2024 [184]。更系统化的内容可以参考 Nakamura 1987 的综述文章 [185]。这些工作大多关注于小黑洞 Plunge 进入超大质量黑洞过程中的引力辐射。而由于 Plunge 轨道在 ISCO 之内，其  $u^r < 0$  恒成立，因此上述推导皆是有效的。但如果轨道是周期性的，即在 turning point 的位置  $u^r = 0$ ，则(6.49)中的所有表达式都存在发散的风险，因为它们的分母上都有  $u^r$ 。本人目前（2025 年春）正在尝试解决这一问题，拓宽 Sasaki-Nakamura 形式的应用范围。

## 2. Kerr 黑洞对引力波的散射

### 2.1 分波法下的引力波散射问题

b-EMRI 系统中的 IB 作为一个恒星级双黑洞引力波源，其自身也在辐射引力波。这束引力波可以直接逃离超大质量黑洞的引力束缚，被无穷远处的观测者看到，其表现为被红移的引力波信号 [65–70]。另一方面，它也可能经过超大质量黑洞散射后再传播到无穷远处，表现为引力透镜效应 [69, 73, 74, 186]。此处，我们并不局限于 b-EMRI 系统的散射，而是研究一个更一般性的散射过程。

如图6.2所示，假设入射引力波平行于  $yz$  平面，与自转轴（ $z$  轴）成角度  $\gamma$ 。当  $\gamma = 0$  时，

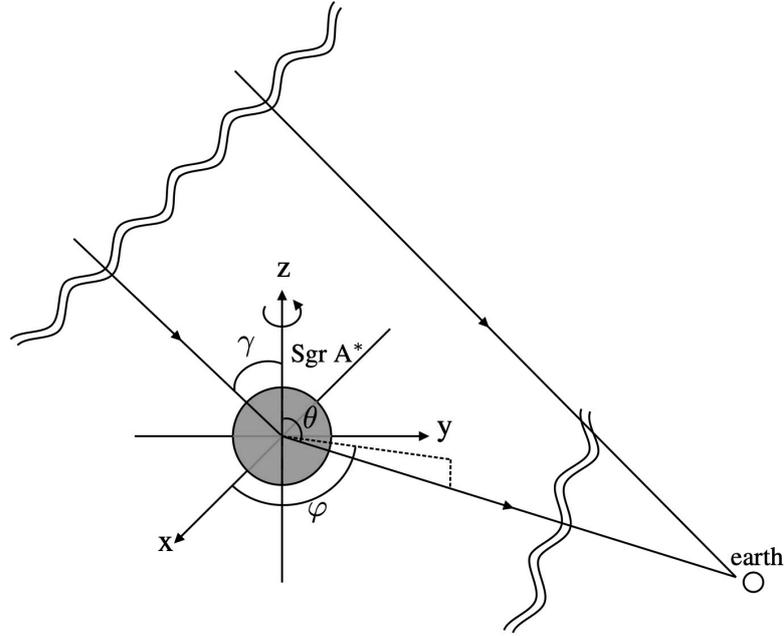


图 6.2 无穷远处入射的平面引力波经银心黑洞散射到地球方向示意图。

引力波沿  $-z$  方向传播。左旋圆偏振度规微扰的渐进表达式为

$$h_{\mu\nu} = h \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \chi & \cos \gamma \sin \chi & -\sin \gamma \sin \chi \\ 0 & \cos \gamma \sin \chi & -\cos^2 \gamma \cos \chi & \cos \gamma \sin \gamma \cos \chi \\ 0 & -\sin \gamma \sin \chi & \cos \gamma \sin \gamma \cos \chi & -\sin^2 \gamma \cos \chi \end{bmatrix}, \quad (6.56)$$

其中

$$\chi = \omega(t + r \sin \gamma \sin \theta \sin \varphi + r \cos \gamma \cos \theta). \quad (6.57)$$

显然当  $\gamma = 0$  时,  $\chi = \omega(t + r \cos \theta) = \omega(t + z)$ , 度规扰动简化为

$$h_{\mu\nu} = h \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \chi & \sin \chi & 0 \\ 0 & \sin \chi & -\cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mu, \nu = t, x, y, z. \quad (6.58)$$

将(6.56)式从笛卡尔坐标转换到球坐标:

$$h_{\alpha'\beta'} = e^{\mu}_{\alpha'} e^{\nu}_{\beta'} h_{\mu\nu}, \quad \alpha', \beta' = t, r, \theta, \varphi, \quad (6.59)$$

其中变换矩阵为

$$e^{\mu}_{\alpha'} \equiv \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ 0 & \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 & \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.60)$$

可推导出(6.56)式各分量的表达式 (此处省略对称分量):

$$h_{rr} = h \left[ \sin^2 \theta \left( \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \cos^2 \gamma \right) - \cos^2 \theta \sin^2 \gamma + \sin 2\theta \sin \varphi \sin \gamma \cos \gamma \right] \cos \chi \\ + h \left( \sin^2 \theta \sin 2\varphi \cos \gamma - \sin 2\theta \cos \varphi \sin \gamma \right) \sin \chi, \quad (6.61a)$$

$$h_{r\theta} = hr \left[ \cos \gamma \sin \gamma \sin \varphi \cos 2\theta + \cos \theta \sin \theta \left( \cos^2 \varphi + \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma \sin^2 \varphi \right) \right] \cos \chi \\ + hr \left( \frac{1}{2} \cos \gamma \sin 2\theta \sin 2\varphi - \cos \varphi \sin \gamma \cos 2\theta \right) \sin \chi, \quad (6.61b)$$

$$h_{r\varphi} = -hr \cos \varphi \sin \theta \left( \sin \theta \sin \varphi - \cos \gamma \cos \theta \sin \gamma + \cos^2 \gamma \sin \theta \sin \varphi \right) \cos \chi \\ + hr \sin \theta \left( \cos \gamma \cos 2\varphi \sin \theta + \cos \theta \sin \gamma \sin \varphi \right) \sin \chi, \quad (6.61c)$$

$$h_{\theta\theta} = hr^2 \left[ \cos^2 \theta \left( \cos^2 \varphi - \cos^2 \gamma \sin^2 \varphi \right) - \sin^2 \gamma \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\gamma \sin \varphi \right] \cos \chi \\ + hr^2 \left( \cos \varphi \sin \gamma \sin 2\theta + \cos \gamma \cos^2 \theta \sin 2\varphi \right) \sin \chi, \quad (6.61d)$$

$$h_{\theta\varphi} = -hr^2 \cos \varphi \sin \theta \left( \cos \gamma \sin \gamma \sin \theta + \cos \theta \sin \varphi + \cos^2 \gamma \cos \theta \sin \varphi \right) \cos \chi \\ + hr^2 \sin \theta \left( \cos \gamma \cos \theta \cos 2\varphi - \sin \gamma \sin \theta \sin \varphi \right) \sin \chi, \quad (6.61e)$$

$$h_{\varphi\varphi} = hr^2 \sin^2 \theta \left( \sin^2 \varphi - \cos^2 \gamma \cos^2 \varphi \right) \cos \chi - hr^2 \cos \gamma \sin^2 \theta \sin 2\varphi \sin \chi. \quad (6.61f)$$

通过将度规微扰投影到 NP-Kinnersley 标架(2.130)上, 可利用微扰方程计算散射振幅和微分截面。在所有 NP 分量中, 我们最关注  $h_{mm}$  和  $h_{\bar{m}\bar{m}}$ , 其表达式为

$$h_{mm} = h_{\mu\nu} m^{\mu} \bar{m}^{\nu} = \frac{h_{\theta\theta} + 2ih_{\theta\varphi} \csc \theta - h_{\varphi\varphi} \csc^2 \theta}{2(r + ia \cos \theta)^2}, \quad (6.62)$$

以及

$$h_{\bar{m}\bar{m}} = h_{\mu\nu} \bar{m}^{\mu} m^{\nu} = \frac{h_{\theta\theta} - 2ih_{\theta\varphi} \csc \theta - h_{\varphi\varphi} \csc^2 \theta}{2(r - ia \cos \theta)^2}. \quad (6.63)$$

它们的渐进形式 ( $r \rightarrow \infty$ ) 具有一般表达式

$${}_s h = \frac{h_{\theta\theta}}{2r^2} + \left( \frac{s}{2} \right) \frac{ih_{\theta\varphi}}{r^2 \sin \theta} - \frac{h_{\varphi\varphi}}{2r^2 \sin^2 \theta}, \quad (6.64)$$

其中  $s$  为自旋权重。定义  ${}_+2h \equiv h_{mm}$  和  ${}_-2h \equiv h_{\bar{m}\bar{m}}$ 。将(6.61)式代入(6.64)式可得

$$\begin{aligned}
 {}_s h = & -\frac{3}{8}h \sin^2 \gamma \sin^2 \theta e^{ix} - \frac{3}{8}h \sin^2 \gamma \sin^2 \theta e^{-ix} \\
 & + \frac{i}{4}h(1 - \cos \gamma) \sin \gamma \sin \theta \left( \frac{1}{2}s - \cos \theta \right) e^{i(\chi+\varphi)} \\
 & + \frac{i}{4}h(1 - \cos \gamma) \sin \gamma \sin \theta \left( \frac{1}{2}s + \cos \theta \right) e^{-i(\chi+\varphi)} \\
 & - \frac{i}{4}h(1 + \cos \gamma) \sin \gamma \sin \theta \left( \frac{1}{2}s + \cos \theta \right) e^{i(\chi-\varphi)} \\
 & - \frac{i}{4}h(1 + \cos \gamma) \sin \gamma \sin \theta \left( \frac{1}{2}s - \cos \theta \right) e^{-i(\chi-\varphi)} \\
 & + \frac{1}{16}h(1 - \cos \gamma)^2 \left[ \left( \cos \theta - \frac{s}{2} \right)^2 + \left( 1 - \frac{s^2}{4} \right) \right] e^{i(\chi+2\varphi)} \\
 & + \frac{1}{16}h(1 - \cos \gamma)^2 \left[ \left( \cos \theta + \frac{s}{2} \right)^2 + \left( 1 - \frac{s^2}{4} \right) \right] e^{-i(\chi+2\varphi)} \\
 & + \frac{1}{16}h(1 + \cos \gamma)^2 \left[ \left( \cos \theta + \frac{s}{2} \right)^2 + \left( 1 - \frac{s^2}{4} \right) \right] e^{i(\chi-2\varphi)} \\
 & + \frac{1}{16}h(1 + \cos \gamma)^2 \left[ \left( \cos \theta - \frac{s}{2} \right)^2 + \left( 1 - \frac{s^2}{4} \right) \right] e^{-i(\chi-2\varphi)}.
 \end{aligned} \tag{6.65}$$

这里我们假设  $s = \pm 2$ ，因此  $1 - s^2/4 = 0$ 。表达式简化为

$$\begin{aligned}
 {}_s h = & \frac{h}{16} \left\{ \left( -6 \sin^2 \gamma \sin^2 \theta \right) \left( e^{ix} + e^{-ix} \right) \right. \\
 & - 4i(\cos \gamma - 1) \sin \gamma \sin \theta \left[ \left( \frac{1}{2}s - \cos \theta \right) e^{i(\chi+\varphi)} + \left( \frac{1}{2}s + \cos \theta \right) e^{-i(\chi+\varphi)} \right] \\
 & - 4i(\cos \gamma + 1) \sin \gamma \sin \theta \left[ \left( \frac{1}{2}s + \cos \theta \right) e^{i(\chi-\varphi)} + \left( \frac{1}{2}s - \cos \theta \right) e^{-i(\chi-\varphi)} \right] \\
 & + (\cos \gamma - 1)^2 \left[ \left( \frac{1}{2}s - \cos \theta \right)^2 e^{i(\chi+2\varphi)} + \left( \frac{1}{2}s + \cos \theta \right)^2 e^{-i(\chi+2\varphi)} \right] \\
 & \left. + (\cos \gamma + 1)^2 \left[ \left( \frac{1}{2}s + \cos \theta \right)^2 e^{i(\chi-2\varphi)} + \left( \frac{1}{2}s - \cos \theta \right)^2 e^{-i(\chi-2\varphi)} \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{6.66}$$

可以看出所有径向依赖性都体现在指数项  $\chi$  中, 这贡献了扰动的相位。我们可以使用  $SWSH_s S_{lm}^{a\omega}(\theta)$  和对  $t$ 、 $\varphi$  依赖性的 Fourier 变换来展开它, 其表达式为

$${}_s h = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{\omega} \sum_{l,m} {}_s \mathcal{B}_{lm}(\tilde{\omega}) {}_s S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\theta) e^{im\varphi - i\tilde{\omega}t}, \tag{6.67}$$

其中求和式为

$$\sum_{l,m} = \sum_{l=|s|}^{\infty} \sum_{m=-l}^l = \sum_{m=-+\infty}^{+\infty} \sum_{l=\text{mas}\{|s|, |m|\}}^{\infty}. \tag{6.68}$$

定义复合角函数

$${}_s Z_{lm}^{a\omega}(\theta, \varphi) = {}_s S_{lm}^{a\omega}(\theta) e^{im\varphi}. \tag{6.69}$$

我们有正交归一关系

$$\langle l'm'|lm\rangle \equiv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta {}_sZ_{lm}^{a\omega}(\theta, \varphi) {}_s\bar{Z}_{l'm'}^{a\omega}(\theta, \varphi) \sin\theta = \delta_{ll'}\delta_{mm'}. \quad (6.70)$$

因此, 展开系数  ${}_s\mathcal{B}_{lm}(\tilde{\omega})$  可表示为

$${}_s\mathcal{B}_{lm}(\tilde{\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int dt \int d\Omega {}_sh {}_s\bar{Z}_{l'm'}^{a\tilde{\omega}}(\theta, \varphi) e^{i\tilde{\omega}t}. \quad (6.71)$$

将式 (6.66) 代入式 (6.71) 并对  $t$  积分, 我们得到

$$\begin{aligned} {}_s\mathcal{B}_{lm}(\tilde{\omega}) = & \frac{h}{16} \left\{ -6 \sin^2 \gamma \left[ {}_s\mathcal{I}_1^0 \delta(\omega + \tilde{\omega}) + {}_s\mathcal{I}_{-1}^0 \delta(\omega - \tilde{\omega}) \right] \right. \\ & - 4i (\cos \gamma - 1) \sin \gamma \left[ {}_s\mathcal{I}_{1-11}^1 \delta(\omega + \tilde{\omega}) + {}_s\mathcal{I}_{-1-1-1}^1 \delta(\omega - \tilde{\omega}) \right] \\ & - 4i (\cos \gamma + 1) \sin \gamma \left[ {}_s\mathcal{I}_{11-1}^1 \delta(\omega + \tilde{\omega}) + {}_s\mathcal{I}_{-1-1-1}^1 \delta(\omega - \tilde{\omega}) \right] \\ & + (\cos \gamma - 1)^2 \left[ {}_s\mathcal{I}_{1-11}^2 \delta(\omega + \tilde{\omega}) + {}_s\mathcal{I}_{-1-1-1}^2 \delta(\omega - \tilde{\omega}) \right] \\ & \left. + (\cos \gamma + 1)^2 \left[ {}_s\mathcal{I}_{11-1}^2 \delta(\omega + \tilde{\omega}) + {}_s\mathcal{I}_{-1-1-1}^2 \delta(\omega - \tilde{\omega}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.72)$$

其中积分  $\mathcal{I}$  定义为

$${}_s\mathcal{I}_{a_1}^0 = \int d\Omega \sin^2 \theta {}_s\bar{S}_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\theta) \exp[i(a_1\rho - m\varphi)], \quad (6.73a)$$

$${}_s\mathcal{I}_{a_1 a_2 a_3}^1 = \int d\Omega \sin \theta \left( \frac{s}{2} + a_2 \cos \theta \right) {}_s\bar{S}_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\theta) \exp\{i[a_1\rho - (m - a_3)\varphi]\}, \quad (6.73b)$$

$${}_s\mathcal{I}_{a_1 a_2 a_3}^2 = \int d\Omega \left( \frac{s}{2} + a_2 \cos \theta \right)^2 {}_s\bar{S}_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\theta) \exp\{i[a_1\rho - (m - 2a_3)\varphi]\}, \quad (6.73c)$$

其中  $a_1, a_2, a_3 = \pm 1$  且  $\rho = \chi - \omega t = \omega r(\sin \gamma \sin \theta \sin \varphi + \cos \gamma \cos \theta)$ , 因为我们已经通过对  $t$  积分消去了时间项:

$$\frac{1}{2\pi} \int dt \exp[i(\tilde{\omega}t \pm \chi)] = \delta(\omega \pm \tilde{\omega}) e^{\pm i\rho}. \quad (6.74)$$

利用 SWSH 是实函数的性质, 积分  $\mathcal{I}$  的显式表达式可以通过以下通用表达式导出:

$${}_s\mathcal{I}_{lm}(\gamma) = \int d\Omega \exp\{i[a_1\rho - (m - a_3)\varphi]\} f(\theta) {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\theta). \quad (6.75)$$

指数项可以分离为:

$$\exp\{i[a_1\rho - (m - a_3)\varphi]\} = \exp[i(\alpha \sin \varphi - n\varphi)] \exp(ia_1\omega r \cos \gamma \cos \theta), \quad (6.76)$$

其中

$$\alpha = a_1\omega r \sin \gamma \sin \theta, \quad n = m - a_3 = \text{integer}. \quad (6.77)$$

注意对于  ${}_s\mathcal{J}_{a_1 a_2 a_3}^2$ , 需要代入  $n = m - 2a_3$ 。根据定义有:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \exp [i(\alpha \sin \varphi - n\varphi)] \equiv 2\pi J_n(\alpha). \quad (6.78)$$

贝塞尔函数的渐近行为为:

$$J_n(\alpha) \approx \left(\frac{2}{\pi\alpha}\right)^{1/2} \cos \left[\alpha - \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{2}\right] = \sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha}} \left[e^{i(\alpha-q)} + e^{i(-\alpha+q)}\right], \quad |\alpha| \rightarrow \infty, \quad (6.79)$$

其中  $q \equiv (n + \frac{1}{2})\pi/2$ 。因此积分的渐近行为为:

$$\begin{aligned} {}_s\mathcal{J}_{lm}(\gamma) &\approx \sqrt{\frac{2\pi}{a_1\omega r \sin \gamma}} \int_0^\pi d\theta \sqrt{\sin \theta} \exp \{i[a_1\omega r \cos(\theta - \gamma) - q]\} f(\theta) {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\theta) \\ &\quad + \sqrt{\frac{2\pi}{a_1\omega r \sin \gamma}} \int_0^\pi d\theta \sqrt{\sin \theta} \exp \{i[a_1\omega r \cos(\theta + \gamma) + q]\} f(\theta) {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\theta). \end{aligned} \quad (6.80)$$

该近似在  $\gamma \neq 0, \pi$  时成立。由于  $r \rightarrow +\infty$ , 我们可以使用“稳相近似 (Stationary Phase Approximation)”积分技术 (推导附在本节最后), 即

$$I = \int_a^b dx g(x) e^{i\lambda f(x)} \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{-\frac{2\pi}{i|\lambda f''(x_0^i)|}} g(x_0^i) e^{i\lambda f(x_0^i)}, \quad (6.81)$$

当  $\lambda \rightarrow \infty$  且  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  内有  $n$  个驻点  $x_0^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 满足  $f'(x_0^i) = 0$  时成立。在我们的情况中,

$$\begin{aligned} {}_s\mathcal{J}_{lm}(\gamma) &\approx \frac{2\pi}{a_1\omega r} \left[ e^{i(a_1\omega r - n\pi/2)} e^{-i\pi/4} \left(\frac{1}{i}\right)^{1/2} f(\gamma) {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\gamma) \right. \\ &\quad \left. + e^{-i(a_1\omega r - n\pi/2)} e^{i\pi/4} \left(\frac{1}{-i}\right)^{1/2} f(\pi - \gamma) {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \right]. \end{aligned} \quad (6.82)$$

在(6.81)式的推导中确定了  $\sqrt{1/i}$  和  $\sqrt{-1/i}$  的精确值为:

$$\left(-\frac{1}{i}\right)^{1/2} = e^{i\pi/4}, \quad \left(\frac{1}{i}\right)^{1/2} = e^{-i\pi/4}. \quad (6.83)$$

因此,

$$\begin{aligned} {}_s\mathcal{J}_{lm}(\gamma) &\approx \frac{2\pi}{ia_1\omega r} \left[ e^{i(a_1\omega r - n\pi/2)} f(\gamma) {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\gamma) - e^{-i(a_1\omega r - n\pi/2)} f(\pi - \gamma) {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \right] \\ &= \frac{2\pi}{ia_1\omega r} \left[ e^{ia_1\omega r} (-i)^m (i)^{qa_3} f(\gamma) {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\gamma) - e^{-ia_1\omega r} (i)^m (i)^{-qa_3} f(\pi - \gamma) {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \right]. \end{aligned} \quad (6.84)$$

对于  ${}_s\mathcal{J}_{a_1}^0$ , 取  $f(\theta) = \sin^2 \theta, q = 0$ , 得到

$${}_s\mathcal{J}_1^0 = \frac{2\pi}{i\omega r} \sin^2 \gamma \left[ e^{i\omega r} (-i)^m {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\gamma) - e^{-i\omega r} (i)^m {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \right], \quad (6.85a)$$

$${}_s\mathcal{J}_{-1}^0 = -\frac{2\pi}{i\omega r} \sin^2 \gamma \left[ e^{-i\omega r} (-i)^m {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\gamma) - e^{i\omega r} (i)^m {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \right]. \quad (6.85b)$$

对于  ${}_s\mathcal{J}_{a_1 a_2 a_3}^1$ , 取  $f(\theta) = \sin \theta (s/2 + a_2 \cos \theta)$ ,  $q = 1$ , 得到

$${}_s\mathcal{J}_{1-11}^1 = \frac{2\pi}{\omega r} \sin \gamma \left[ e^{i\omega r} (-i)^m \left( \frac{s}{2} - \cos \gamma \right) {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\gamma) + e^{-i\omega r} (i)^m \left( \frac{s}{2} + \cos \gamma \right) {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \right], \quad (6.86a)$$

$${}_s\mathcal{J}_{-11-1}^1 = \frac{2\pi}{\omega r} \sin \gamma \left[ e^{-i\omega r} (-i)^m \left( \frac{s}{2} + \cos \gamma \right) {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\gamma) + e^{i\omega r} (i)^m \left( \frac{s}{2} - \cos \gamma \right) {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \right], \quad (6.86b)$$

$${}_s\mathcal{J}_{11-1}^1 = -\frac{2\pi}{\omega r} \sin \gamma \left[ e^{i\omega r} (-i)^m \left( \frac{s}{2} + \cos \gamma \right) {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\gamma) + e^{-i\omega r} (i)^m \left( \frac{s}{2} - \cos \gamma \right) {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \right], \quad (6.86c)$$

$${}_s\mathcal{J}_{-1-11}^1 = -\frac{2\pi}{\omega r} \sin \gamma \left[ e^{-i\omega r} (-i)^m \left( \frac{s}{2} - \cos \gamma \right) {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\gamma) + e^{i\omega r} (i)^m \left( \frac{s}{2} + \cos \gamma \right) {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \right]. \quad (6.86d)$$

对于  ${}_s\mathcal{J}_{a_1 a_2 a_3}^2$ , 取  $f(\theta) = (s/2 + a_2 \cos \theta)^2$ ,  $q = 2$ , 得到

$${}_s\mathcal{J}_{1-11}^2 = -\frac{2\pi}{i\omega r} \left[ e^{i\omega r} (-i)^m \left( \frac{s}{2} - \cos \gamma \right)^2 {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\gamma) - e^{-i\omega r} (i)^m \left( \frac{s}{2} + \cos \gamma \right)^2 {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \right], \quad (6.87a)$$

$${}_s\mathcal{J}_{-11-1}^2 = \frac{2\pi}{i\omega r} \left[ e^{-i\omega r} (-i)^m \left( \frac{s}{2} + \cos \gamma \right)^2 {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\gamma) - e^{i\omega r} (i)^m \left( \frac{s}{2} - \cos \gamma \right)^2 {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \right], \quad (6.87b)$$

$${}_s\mathcal{J}_{11-1}^2 = -\frac{2\pi}{i\omega r} \left[ e^{i\omega r} (-i)^m \left( \frac{s}{2} + \cos \gamma \right)^2 {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\gamma) - e^{-i\omega r} (i)^m \left( \frac{s}{2} - \cos \gamma \right)^2 {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \right], \quad (6.87c)$$

$${}_s\mathcal{J}_{-1-11}^2 = \frac{2\pi}{i\omega r} \left[ e^{-i\omega r} (-i)^m \left( \frac{s}{2} - \cos \gamma \right)^2 {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\gamma) - e^{i\omega r} (i)^m \left( \frac{s}{2} + \cos \gamma \right)^2 {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \right]. \quad (6.87d)$$

将所有表达式代入(6.72)式, 我们得到

$$\begin{aligned} {}_s\mathcal{B}_{lm}(\tilde{\omega}) &= \frac{i(-i)^m h\pi(2+s)(10+3s+(s-2)\cos 2\gamma)}{32r\omega} e^{i\omega r} {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\gamma) \delta(\omega + \tilde{\omega}) \\ &+ \frac{i(i)^m h\pi(2+s)(10+3s+(s-2)\cos 2\gamma)}{32r\omega} e^{i\omega r} {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \delta(\omega - \tilde{\omega}) \\ &+ \frac{(-i)(-i)^m h\pi(s-2)(-10+3s+(2+s)\cos 2\gamma)}{32r\omega} e^{-i\omega r} {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\gamma) \delta(\omega - \tilde{\omega}) \\ &+ \frac{(-i)(i)^m h\pi(s-2)(-10+3s+(2+s)\cos 2\gamma)}{32r\omega} e^{-i\omega r} {}_sS_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \delta(\omega + \tilde{\omega}). \end{aligned} \quad (6.88)$$

再次使用  $s = \pm 2$  简化表达式为

$$\begin{aligned} {}_s\mathcal{B}_{lm}(\tilde{\omega}) = & \frac{i h \pi}{\omega r} \left( \frac{s}{2} + 1 \right) e^{i\omega r} \left[ (-i)^m {}_s S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\gamma) \delta(\omega + \tilde{\omega}) + (i)^m {}_s S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \delta(\omega - \tilde{\omega}) \right] \\ & + \frac{i h \pi}{\omega r} \left( \frac{s}{2} - 1 \right) e^{-i\omega r} \left[ (-i)^m {}_s S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\gamma) \delta(\omega - \tilde{\omega}) + (i)^m {}_s S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \delta(\omega + \tilde{\omega}) \right]. \end{aligned} \quad (6.89)$$

将(6.89)式代入(6.67)式并对  $\tilde{\omega}$  积分得到

$$\begin{aligned} {}_s h = & \frac{i h \pi}{\omega r} \left( \frac{s}{2} + 1 \right) \sum_{l,m} \left[ (-i)^m {}_s S_{lm}^{-a\omega}(\gamma) {}_s S_{lm}^{-a\omega}(\theta) e^{i\omega(r+t)+im\varphi} \right. \\ & \left. + (i)^m {}_s S_{lm}^{a\omega}(\pi - \gamma) {}_s S_{lm}^{a\omega}(\theta) e^{i\omega(r-t)+im\varphi} \right] \\ & + \frac{i h \pi}{\omega r} \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \sum_{l,m} \left[ (-i)^m {}_s S_{lm}^{a\omega}(\gamma) {}_s S_{lm}^{a\omega}(\theta) e^{-i\omega(r+t)+im\varphi} \right. \\ & \left. + (i)^m {}_s S_{lm}^{-a\omega}(\pi - \gamma) {}_s S_{lm}^{-a\omega}(\theta) e^{-i\omega(r-t)+im\varphi} \right]. \end{aligned} \quad (6.90)$$

(6.90)式是使用 SWSH 对(6.66)式的展开。在 Kerr 背景下，由于牛顿势的  $1/r$  渐进性质，我们需要将指数中的  $r$  替换为  $r_*$ ，这会给相位项引入对数修正，见(2.177)式。然而，SWSH 仅追踪了度规扰动的角度依赖性。 ${}_s h$  的径向演化需要通过求解径向方程  $R_{lm\omega}(r)$  来确定。

Chrzanowski 在 1975 年推导了 Teukolsky 形式下的模式展开 [121]。对于入射度规微扰，模式展开为

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^{\text{down}}(x, lm\omega P) = & \left\{ -l_\mu l_\nu (\bar{\delta} + \alpha + 3\bar{\beta} - \bar{\tau}) (\bar{\delta} + 4\bar{\beta} + 3\bar{\tau}) \right. \\ & - \bar{m}_\mu \bar{m}_\nu (\mathbf{D} - \bar{\rho} + 3\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}) (\mathbf{D} + 3\bar{\rho} + 4\bar{\epsilon}) \\ & + l_{(\mu} \bar{m}_{\nu)} \left[ (\mathbf{D} + \rho - \bar{\rho} + \epsilon + 3\bar{\epsilon}) (\bar{\delta} + 4\bar{\beta} + 3\bar{\tau}) \right. \\ & \left. \left. (\bar{\delta} + 3\bar{\beta} - \alpha - \pi - \bar{\tau}) (\mathbf{D} + 3\bar{\rho} + 4\bar{\epsilon}) \right] \right\} \\ & \times {}_{-2}R_{lm\omega}^{\text{down}}(r) {}_2S_{lm}^{a\omega}(\theta) e^{-i\omega t + im\varphi} \\ & + P \left\{ -l_\mu l_\nu (\delta + \bar{\alpha} + 3\beta - \tau) (\delta + 4\beta + 3\tau) \right. \\ & - m_\mu m_\nu (\mathbf{D} - \bar{\rho} + 3\epsilon - \bar{\epsilon}) (\mathbf{D} + 3\rho + 4\epsilon) \\ & + l_{(\mu} m_{\nu)} \left[ (\mathbf{D} + \bar{\rho} - \rho + \bar{\epsilon} + 3\epsilon) (\delta + 4\beta + 3\tau) \right. \\ & \left. + (\delta + 3\beta - \bar{\alpha} - \bar{\pi} - \tau) (\mathbf{D} + 3\rho + 4\epsilon) \right] \right\} \\ & \times {}_{-2}R_{lm\omega}^{\text{down}}(r) {}_{-2}S_{lm}^{a\omega}(\theta) e^{-i\omega t + im\varphi} (-1)^{l+2m}, \end{aligned} \quad (6.91)$$

满足入射规范条件  $h_{\mu\nu} l^\nu = h_\mu{}^\mu = 0$ 。这里  $x = t, r, \theta, \varphi$ ， $P = \pm 1$  表示模式的宇称。而出射模

式为

$$\begin{aligned}
 h_{\mu\nu}^{\text{up}}(x, lm\omega P) = & \bar{\rho}^{-4} \left\{ -n_{\mu}n_{\nu}(\delta - 3\bar{\alpha} - \beta + 5\bar{\pi})(\delta - 4\bar{\alpha} + \bar{\pi}) \right. \\
 & - m_{\mu}m_{\nu}(\Delta + 5\bar{\mu} - 3\bar{\gamma} + \gamma)(\Delta + \bar{\mu} - 4\bar{\gamma}) \\
 & + n_{(\mu}m_{\nu)} \left[ (\delta + 5\bar{\pi} + \beta - 3\bar{\alpha} + \tau)(\Delta + \bar{\mu} - 4\bar{\gamma}) \right. \\
 & \left. \left. + (\Delta + 5\bar{\mu} - \mu - 3\bar{\gamma} - \gamma)(\delta - 4\bar{\alpha} + \bar{\pi}) \right] \right\} \\
 & \times {}_2R_{lm\omega}^{\text{up}}(r) {}_2S_{lm}^{a\omega}(\theta) e^{-i\omega t + im\varphi} \\
 & + P\bar{\rho}^{-4} \left\{ -n_{\mu}n_{\nu}(\bar{\delta} - 3\alpha - \bar{\beta} + 5\bar{\pi})(\bar{\delta} - 4\alpha + \bar{\pi}) \right. \\
 & - \bar{m}_{\mu}\bar{m}_{\nu}(\Delta + 5\mu - 3\gamma + \bar{\gamma})(\Delta + \mu - 4\gamma) \\
 & + n_{(\mu}m_{\nu)} \left[ (\bar{\delta} + 5\bar{\pi} + \bar{\beta} - 3\alpha + \bar{\tau})(\Delta + \mu - 4\gamma) \right. \\
 & \left. \left. + (\Delta + 5\mu - \bar{\mu} - 3\gamma - \bar{\gamma})(\bar{\delta} - 4\alpha + \bar{\pi}) \right] \right\} \\
 & \times {}_2R_{lm\omega}^{\text{up}}(r) {}_2S_{lm}^{a\omega}(\theta) e^{-i\omega t + im\varphi} (-1)^{l+2m},
 \end{aligned} \tag{6.92}$$

满足出射规范条件  $h_{\mu\nu}n^{\nu} = h_{\mu}^{\mu} = 0$ 。上面所有用到的算符和自旋系数都定义在(2.76)和(2.144)式。因此，我们可以推导出这些模式在 NP 标架上的投影表达式，使用  $h_{mm} = h_{\mu\nu}m^{\mu}m^{\nu}$  和  $h_{\bar{m}\bar{m}} = h_{\mu\nu}\bar{m}^{\mu}\bar{m}^{\nu}$ 。根据(6.91)、(6.92)式以及正交归一关系  $-l^{\mu}n_{\mu} = m^{\mu}\bar{m}_{\mu} = 1$ ，可以看出  $h_{\mu\nu}^{\text{down}}m^{\mu}m^{\nu}$  唯一非零项是与  $\bar{m}_{\mu}\bar{m}_{\nu}$  的乘积。结果为

$$\begin{aligned}
 h_{mm}^{\text{down}} = & -(\mathbf{D} - \bar{\rho} + 3\bar{\varepsilon} - \varepsilon)(\mathbf{D} + 3\bar{\rho} + 4\bar{\varepsilon}) {}_2R_{lm\omega}^{\text{down}}(r) {}_2S_{lm}^{a\omega}(\theta) e^{-i\omega t + im\varphi} \\
 = & -\frac{d^2R(r)}{dr^2}S(\theta)e^{-i\omega t + im\varphi} - C_1\frac{dR(r)}{dr}S(\theta)e^{-i\omega t - im\varphi} - C_2R(r)S(\theta)e^{-i\omega t - im\varphi},
 \end{aligned} \tag{6.93}$$

其中  $R(r) = {}_2R_{lm\omega}^{\text{down}}(r)$ ,  $S(\theta) = {}_2S_{lm}^{a\omega}(\theta)$ , 系数为

$$\begin{aligned}
 C_1 = & \frac{2(a \cos \theta (a^2\omega - am + r^2\omega) + a^2(-1 - ir\omega) + iamr + r(2M + r(-1 - ir\omega)))}{(a^2 + r(r - 2M))(r + ia \cos \theta)}, \\
 C_2 = & \left[ a^4\omega(-r\omega + 2i) + 2a^3m(r\omega - i) - a^2r(m^2 + 6iM\omega + 2r\omega(r\omega - 2i)) \right. \\
 & - ia \cos \theta (a^4\omega^2 - 2a^3m\omega + a^2(m^2 + 2\omega(r^2\omega + iM))) \\
 & - 2iam(M + r(-1 - ir\omega)) + r^2\omega(r^2\omega - 2iM) \left. \right] + 2amr(3iM + r(r\omega - 2i)) \\
 & - r^3\omega(2iM + r(r\omega - 2i)) \left. \right] / (a^2 + r(r - 2M))^2 (r + ia \cos \theta).
 \end{aligned} \tag{6.94}$$

取极限  $r \rightarrow \infty$ ，我们得到

$$h_{mm}^{\text{down}}(x, lm\omega P) = \left[ \omega^2 R(r) + 2i\omega \frac{dR(r)}{dr} - \frac{d^2R(r)}{dr^2} \right] S(\theta) e^{-i\omega t + im\varphi}. \tag{6.95}$$

从齐次解的渐进行为(2.195)中，我们可以清楚地看到，选择“down”和“up”基的原因在于：“down”解在无穷远处是纯入射波，而“up”解在无穷远处是纯出射波。我们的边界条件

要求在无穷远处是纯入射平面波。因此，这种模式展开可以方便地将入射平面波展开为入射球面波，从而边界条件可以完全由“down”解描述。

回到(6.95)式，我们有：

$$\begin{aligned} {}_sR_{lm\omega}^{\text{down}}(r) &= {}_sR_{lm\omega}^{\text{down,trans}} \frac{1}{r} e^{-i\omega r_*} & r \rightarrow \infty \\ \frac{d}{{}_sR_{lm\omega}^{\text{down}}(r)} &= -{}_sR_{lm\omega}^{\text{down,trans}} \frac{1+i\omega r}{r^2} e^{-i\omega r_*} = {}_sR_{lm\omega}^{\text{down,trans}} \frac{-i\omega}{r} e^{-i\omega r_*} & r \rightarrow \infty \\ \frac{d^2}{{}_sR_{lm\omega}^{\text{down}}(r)} &= -{}_sR_{lm\omega}^{\text{down,trans}} \frac{2+\omega^2 r^2}{r^3} e^{-i\omega r_*} = {}_sR_{lm\omega}^{\text{down,trans}} \frac{-\omega^2}{r} e^{-i\omega r_*} & r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (6.96)$$

这里我们使用了

$$\frac{dr_*}{dr} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} = 1 \quad r \rightarrow \infty. \quad (6.97)$$

于是得到

$$h_{mm}^{\text{down}}(x, lm\omega P) = {}_{-2}R_{lm\omega}^{\text{down,trans}} \frac{4\omega^2}{r} {}_2S_{lm}^{aw}(\theta) e^{-i\omega(t+r_*)+im\varphi} \quad r \rightarrow \infty. \quad (6.98)$$

通过相同步骤，我们得到

$$h_{mm}^{\text{down}}(x, lm\omega P) = {}_{-2}R_{lm\omega}^{\text{down,trans}} \frac{4\omega^2}{r} {}_2S_{lm}^{aw}(\theta) e^{-i\omega(t+r_*)+im\varphi} \quad r \rightarrow \infty, \quad (6.99a)$$

$$h_{\bar{m}\bar{m}}^{\text{down}}(x, lm\omega P) = P(-1)^{l+2m} {}_{-2}R_{lm\omega}^{\text{down,trans}} \frac{4\omega^2}{r} {}_{-2}S_{lm}^{aw}(\theta) e^{-i\omega(t+r_*)+im\varphi} \quad r \rightarrow \infty, \quad (6.99b)$$

$$h_{mm}^{\text{up}}(x, lm\omega P) = P(-1)^{l+2m} {}_2R_{lm\omega}^{\text{up,trans}} \frac{\omega^2}{r} {}_2S_{lm}^{aw}(\theta) e^{-i\omega(t-r_*)+im\varphi} \quad r \rightarrow \infty, \quad (6.99c)$$

$$h_{\bar{m}\bar{m}}^{\text{up}}(x, lm\omega P) = {}_2R_{lm\omega}^{\text{up,trans}} \frac{\omega^2}{r} {}_{-2}S_{lm}^{aw}(\theta) e^{-i\omega(t-r_*)+im\varphi} \quad r \rightarrow \infty. \quad (6.99d)$$

${}_s h$  也可以用这些模式展开。我们可以写出

$${}_2h = h_{mm} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{\omega} \sum_{lmP} \left[ {}_2K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{down}} h_{mm}^{\text{down}}(x, lm\tilde{\omega}P) + {}_2K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}} h_{mm}^{\text{up}}(x, lm\tilde{\omega}P) \right], \quad (6.100a)$$

$$-{}_2h = h_{\bar{m}\bar{m}} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{\omega} \sum_{lmP} \left[ -{}_2K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{down}} h_{\bar{m}\bar{m}}^{\text{down}}(x, lm\tilde{\omega}P) + -{}_2K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}} h_{\bar{m}\bar{m}}^{\text{up}}(x, lm\tilde{\omega}P) \right]. \quad (6.100b)$$

从(6.90)式, 令  $s = 2$  得到

$$\begin{aligned}
 h_{mm} &= \frac{2ih\pi}{\omega r} \sum_{l,m} \left[ (-i)^m {}_2S_{lm}^{-a\omega}(\gamma) {}_2S_{lm}^{-a\omega}(\theta) e^{i\omega(t+r_*)+im\varphi} \right. \\
 &\quad \left. + (i)^m {}_2S_{lm}^{a\omega}(\pi - \gamma) {}_2S_{lm}^{a\omega}(\theta) e^{-i\omega(t-r_*)+im\varphi} \right] \\
 &= \int d\tilde{\omega} \sum_{lmP} {}_2K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{down}} R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{down,trans}} \frac{4\tilde{\omega}^2}{r} {}_2S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\theta) e^{-i\tilde{\omega}(t+r_*)+im\varphi} \\
 &\quad + \int d\tilde{\omega} \sum_{lmP} {}_2K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}} P(-1)^{l+2m} R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{up,trans}} \frac{\tilde{\omega}^2}{r} {}_2S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\theta) e^{-i\tilde{\omega}(t-r_*)+im\varphi}.
 \end{aligned} \tag{6.101}$$

通过匹配系数, 得到

$$\begin{aligned}
 \frac{2ih\pi}{\omega} (-i)^m {}_2S_{lm}^{-a\omega}(\gamma) &= \sum_P 4\tilde{\omega}^2 {}_2K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{down}} R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{down,trans}} \delta(\omega + \tilde{\omega}) \\
 &= 8\tilde{\omega}^2 {}_2K_{lm\tilde{\omega}}^{\text{down}} R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{down,trans}} \delta(\omega + \tilde{\omega}).
 \end{aligned} \tag{6.102}$$

因此

$${}_2K_{lm\tilde{\omega}}^{\text{down}} = {}_2K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{down}} = \frac{ih\pi}{4\omega\tilde{\omega}^2 {}_2R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{down,trans}}} (-i)^m {}_2S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\gamma) \delta(\omega + \tilde{\omega}). \tag{6.103}$$

我们还有

$$\frac{2ih\pi}{\omega} (i)^m {}_2S_{lm}^{a\omega}(\pi - \gamma) = \sum_P P(-1)^{l+2m} \tilde{\omega}^2 {}_2K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}} R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{up,trans}} \delta(\omega - \tilde{\omega}). \tag{6.104}$$

因此得到

$${}_2K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}} = \frac{ih\pi}{\omega\tilde{\omega}^2 {}_2R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{up,trans}}} P(-1)^l (i)^m {}_2S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \delta(\omega - \tilde{\omega}) \tag{6.105}$$

当取  $s = -2$  时, 我们有

$$\begin{aligned}
 h_{\bar{m}\bar{m}} &= -\frac{2ih\pi}{\omega r} \sum_{l,m} \left[ (-i)^m {}_{-2}S_{lm}^{a\omega}(\gamma) {}_{-2}S_{lm}^{a\omega}(\theta) e^{-i\omega(t+r_*)+im\varphi} \right. \\
 &\quad \left. + (i)^m {}_{-2}S_{lm}^{-a\omega}(\pi - \gamma) {}_{-2}S_{lm}^{-a\omega}(\theta) e^{i\omega(t-r_*)+im\varphi} \right] \\
 &= \int d\tilde{\omega} \sum_{lmP} {}_{-2}K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{down}} P(-1)^{l+2m} {}_{-2}R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{down,trans}} \frac{4\tilde{\omega}^2}{r} {}_{-2}S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\theta) e^{-i\tilde{\omega}(t+r_*)+im\varphi} \\
 &\quad + \int d\tilde{\omega} \sum_{lmP} {}_{-2}K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}} R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{up,trans}} \frac{\tilde{\omega}^2}{r} {}_{-2}S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\theta) e^{-i\tilde{\omega}(t-r_*)+im\varphi}.
 \end{aligned} \tag{6.106}$$

通过匹配系数, 得到

$$\begin{aligned}
 -\frac{2ih\pi}{\omega} (-i)^m {}_{-2}S_{lm}^{a\omega}(\gamma) &= \sum_P {}_{-2}K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{down}} 4\tilde{\omega}^2 P(-1)^{l+2m} {}_{-2}R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{down,trans}} \delta(\omega - \tilde{\omega}), \\
 -\frac{2ih\pi}{\omega} (i)^m {}_{-2}S_{lm}^{-a\omega}(\pi - \gamma) &= \sum_P {}_{-2}K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}} \tilde{\omega}^2 {}_{-2}R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{up,trans}} \delta(\omega + \tilde{\omega}).
 \end{aligned} \tag{6.107}$$

因此

$$\begin{aligned} {}_{-2}K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{down}} &= -\frac{i h \pi}{4 \omega \tilde{\omega}^2 {}_{-2}R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{down,trans}}} P (-1)^l (-i)^m {}_{-2}S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\gamma) \delta(\omega - \tilde{\omega}), \\ {}_{-2}K_{lm\tilde{\omega}}^{\text{up}} &= {}_{-2}K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}} = -\frac{i h \pi}{\omega \tilde{\omega}^2 {}_2R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{up,trans}}} (i)^m {}_{-2}S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \delta(\omega + \tilde{\omega}). \end{aligned} \quad (6.108)$$

我们还可以定义

$$\begin{aligned} K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{down}} &= {}_2K_{lm\tilde{\omega}}^{\text{down}} + {}_{-2}K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{down}} \\ &= \frac{i h \pi}{4 \omega \tilde{\omega}^2 {}_{-2}R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{down,trans}}} \left[ (-i)^m {}_2S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\gamma) \delta(\omega + \tilde{\omega}) \right. \\ &\quad \left. - P (-1)^l (-i)^m {}_{-2}S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\gamma) \delta(\omega - \tilde{\omega}) \right], \end{aligned} \quad (6.109)$$

以及

$$\begin{aligned} K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}} &= {}_2K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}} + {}_{-2}K_{lm\tilde{\omega}}^{\text{up}} \\ &= \frac{i h \pi}{\omega \tilde{\omega}^2 {}_2R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{up,trans}}} \left[ P (-1)^l (i)^m {}_2S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \delta(\omega - \tilde{\omega}) \right. \\ &\quad \left. - (i)^m {}_{-2}S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \delta(\omega + \tilde{\omega}) \right]. \end{aligned} \quad (6.110)$$

不难验证

$$\bar{K}_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{down}} = P K_{l-m-\tilde{\omega}P}^{\text{down}} (-1)^{l+m+s}, \quad \bar{K}_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}} = P K_{l-m-\tilde{\omega}P}^{\text{up}} (-1)^{l+m+s}, \quad (6.111)$$

以及更重要的关系

$$4 {}_{-2}R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{down,trans}} K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{down}} = (-1)^{l+1} {}_2R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{up,trans}} K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}}. \quad (6.112)$$

我们可以写出

$$h_{\mu\nu}^{\text{down}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\omega} \sum_{lmP} K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{down}} h_{\mu\nu}^{\text{down}}(lm\tilde{\omega}P), \quad (6.113)$$

以及

$$h_{\mu\nu}^{\text{up}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\omega} \sum_{lmP} K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}} h_{\mu\nu}^{\text{up}}(lm\tilde{\omega}P). \quad (6.114)$$

我们可以容易验证，在渐进条件下有

$$\begin{aligned} h_{mm}^{\text{down}} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\omega} \sum_{lmP} K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{down}} h_{mm}^{\text{down}}(lm\tilde{\omega}P) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\omega} \sum_{lmP} {}_2K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{down}} h_{mm}^{\text{down}}(lm\tilde{\omega}P), \\ h_{\bar{m}\bar{m}}^{\text{down}} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\omega} \sum_{lmP} K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{down}} h_{\bar{m}\bar{m}}^{\text{down}}(lm\tilde{\omega}P) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\omega} \sum_{lmP} {}_{-2}K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{down}} h_{\bar{m}\bar{m}}^{\text{down}}(lm\tilde{\omega}P), \\ h_{mm}^{\text{up}} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\omega} \sum_{lmP} K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}} h_{mm}^{\text{up}}(lm\tilde{\omega}P) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\omega} \sum_{lmP} {}_2K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}} h_{mm}^{\text{up}}(lm\tilde{\omega}P), \\ h_{\bar{m}\bar{m}}^{\text{up}} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\omega} \sum_{lmP} K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}} h_{\bar{m}\bar{m}}^{\text{up}}(lm\tilde{\omega}P) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\omega} \sum_{lmP} {}_{-2}K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}} h_{\bar{m}\bar{m}}^{\text{up}}(lm\tilde{\omega}P). \end{aligned} \quad (6.115)$$

然而，这些表达式仅在空间无限远  $r \rightarrow \infty$  ( $r_* \rightarrow \infty$ ) 处成立。一般情况下， $h^{\text{down}}$  和  $h^{\text{up}}$  不能直接相加，因为它们不是在同一规范条件下写出的。我们需要一些规范不变的量。此外，为了研究平面引力波通过 Kerr 黑洞时的行为，我们需要在所有半径处都有效的量。这些量就是 Weyl 标量  $\psi_0$  和  $\psi_4$ ，它们也在 Chrzanowski 1975 年的工作中给出

$$\begin{aligned} -2\psi_0 &= (\delta - \bar{\pi} - 3\beta - \bar{\alpha})(\delta + \bar{\pi} - 2\beta - 2\bar{\alpha})h_{ll} + (\mathbf{D} - \bar{\rho} - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon})(\mathbf{D} - \bar{\rho} - 2\varepsilon + 2\bar{\varepsilon})h_{mm} \\ &\quad - [(\mathbf{D} - \bar{\rho} - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon})(\delta + 2\bar{\pi} - 2\beta) + (\delta + \bar{\pi} - 3\beta - \bar{\alpha})(\mathbf{D} - 2\bar{\rho} - 2\varepsilon)]h_{(lm)}, \end{aligned} \quad (6.116)$$

以及

$$\begin{aligned} -2\psi_4 &= (\bar{\delta} - \bar{\tau} + 3\alpha + \bar{\beta})(\bar{\delta} - \bar{\tau} + 2\alpha + 2\bar{\beta})h_{nn} + (\Delta + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma})(\Delta + \bar{\mu} + 2\gamma - 2\bar{\gamma})h_{\bar{m}\bar{m}} \\ &\quad - [(\Delta + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma})(\bar{\delta} - 2\bar{\tau} + 2\alpha) + (\bar{\delta} - \bar{\tau} + 3\alpha + \bar{\beta})(\Delta + 2\bar{\mu} + 2\gamma)]h_{(n\bar{m})}. \end{aligned} \quad (6.117)$$

利用(6.91)和(6.92)式，我们可以计算  $\psi_4^{\text{down}}$

$$\begin{aligned} -2\psi_4^{\text{down}}(lm\omega P) &= -(\bar{\delta} - \bar{\tau} + 3\alpha + \bar{\beta})(\bar{\delta} - \bar{\tau} + 2\alpha + 2\bar{\beta})(\bar{\delta} + \alpha + 3\bar{\beta} - \bar{\tau})(\bar{\delta} + 4\bar{\beta} + 3\bar{\tau}) \\ &\quad \times {}_{-2}R_{lm\omega}^{\text{down}}(r) {}_2S_{lm}^{a\omega}(\theta) e^{-i\omega t + im\varphi} \\ &\quad - P \left\{ (\bar{\delta} - \bar{\tau} + 3\alpha + \bar{\beta})(\bar{\delta} - \bar{\tau} + 2\alpha + 2\bar{\beta})(\delta + \bar{\alpha} + 3\beta - \tau)(\delta + 4\beta + 3\tau) \right. \\ &\quad + (\Delta + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma})(\Delta + \bar{\mu} + 2\gamma - 2\bar{\gamma})(\mathbf{D} - \bar{\rho} + 3\varepsilon - \bar{\varepsilon})(\mathbf{D} + 3\rho + 4\varepsilon) \\ &\quad + [(\Delta + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma})(\bar{\delta} - 2\bar{\tau} + 2\alpha) + (\bar{\delta} - \bar{\tau} + 3\alpha + \bar{\beta})(\Delta + 2\bar{\mu} + 2\gamma)] \\ &\quad \left. \times [(\mathbf{D} + \bar{\rho} - \rho + \bar{\varepsilon} + 3\varepsilon)(\delta + 4\beta + 3\tau) + (\delta + 3\beta - \bar{\alpha} - \bar{\pi} - \tau)(\mathbf{D} + 3\rho + 4\varepsilon)] \right\} \\ &\quad \times {}_{-2}R_{lm\omega}^{\text{down}}(r) {}_{-2}S_{lm}^{a\omega}(\theta) e^{-i\omega t + im\varphi} (-1)^{l+2m}. \end{aligned} \quad (6.118)$$

展开式中包含大量项，涉及对  $r$  和  $\theta$  的四阶导数。简化这些表达式需要一定的工作量。对于  $\psi_4^{\text{up}}$ 、 $\psi_0^{\text{down}}$  和  $\psi_0^{\text{up}}$ ，计算过程类似。最终我们得到

$$-8\psi_0^{\text{down}} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{\omega} \sum_{lmP} K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{down}} R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{down}}(r) {}_2S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\theta) e^{-i\tilde{\omega}t + im\varphi}, \quad (6.119a)$$

$$-8\rho^{-4}\psi_4^{\text{down}} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{\omega} \sum_{lmP} (\text{Re } C + 12iM\tilde{\omega}P) K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{down}} R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{down}}(r) {}_{-2}S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\theta) e^{-i\tilde{\omega}t + im\varphi}, \quad (6.119b)$$

$$-8\psi_0^{\text{up}} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{\omega} \sum_{lmP} (\text{Re } C - 12iM\tilde{\omega}P) K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}} R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{up}}(r) {}_2S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\theta) e^{-i\tilde{\omega}t + im\varphi}, \quad (6.119c)$$

$$-8\rho^{-4}\psi_4^{\text{up}} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{\omega} \sum_{lmP} |C|^2 K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}} R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{up}}(r) {}_{-2}S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\theta) e^{-i\tilde{\omega}t + im\varphi}, \quad (6.119d)$$

其中 Teukolsky-Starobinsky 常数  $|C|^2$ 、 $\text{Im } C$  和  $\text{Re } C$  都定义在(3.242)、(3.243)和(3.244)式。Weyl 标量  $\psi_4 = \psi_4^{\text{up}} + \psi_4^{\text{down}}$  是规范不变的。取极限  $r \rightarrow \infty$  并使用(2.195)、(6.109)、(6.110)式, 我们得到

$$\begin{aligned} \psi_4 &= -\frac{1}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{\omega} \sum_{lmP} \left[ |C|^2 K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}} {}_{-2}R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{up,trans}} \frac{e^{-i\tilde{\omega}(t-r_*)}}{r} \right. \\ &\quad \left. + (\text{Re } C + 12iM\tilde{\omega}P) K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{down}} {}_{-2}R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{down,trans}} \frac{e^{-i\tilde{\omega}(t+r_*)}}{r^5} \right] {}_{-2}S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\theta) e^{+im\varphi} \\ &= -\frac{1}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{\omega} \sum_{lmP} \left[ \frac{|C|^2}{\tilde{\omega}^2} K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}} (\text{plain} + \text{scatter}) \frac{e^{-i\tilde{\omega}(t-r_*)}}{r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\text{Re } C + 12iM\tilde{\omega}P}{4\tilde{\omega}^2} K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{down}} (\text{plain}) {}_{-2} \frac{e^{-i\tilde{\omega}(t+r_*)}}{r^5} \right] {}_{-2}S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\theta) e^{+im\varphi}. \end{aligned} \quad (6.120)$$

新的振幅为

$$\begin{aligned} K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{down}}(p) &= \frac{i\hbar\pi}{\omega} \left[ (-i)^m {}_2S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\gamma) \delta(\omega + \tilde{\omega}) - P(-1)^l (-i)^m {}_{-2}S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\gamma) \delta(\omega - \tilde{\omega}) \right], \\ K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}}(p+s) &= \frac{i\hbar\pi}{\omega} \frac{{}_{-2}R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{up,trans}}}{{}_2R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{up,trans}}} \left[ P(-1)^l (i)^m {}_2S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \delta(\omega - \tilde{\omega}) \right. \\ &\quad \left. - (i)^m {}_{-2}S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \delta(\omega + \tilde{\omega}) \right]. \end{aligned} \quad (6.121)$$

这里“p”表示平面波, “p+s”表示平面波加散射波。利用(6.112)式, 我们发现

$$K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}}(p) = 4(-1)^{l+1} \frac{{}_{-2}R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{down,trans}}}{{}_2R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{up,trans}}} K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{down}}(p). \quad (6.122)$$

于是散射振幅为

$$\begin{aligned} K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}}(s) &= K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}}(p+s) - K_{lm\tilde{\omega}P}^{\text{up}}(p) \\ &= \frac{i\hbar\pi}{\omega} \frac{{}_{-2}R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{up,trans}} - 4{}_2R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{down,trans}}}{{}_2R_{lm\tilde{\omega}}^{\text{up,trans}}} \\ &\quad \times \left[ P(-1)^l (i)^m {}_2S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \delta(\omega - \tilde{\omega}) - (i)^m {}_{-2}S_{lm}^{a\tilde{\omega}}(\pi - \gamma) \delta(\omega + \tilde{\omega}) \right]. \end{aligned} \quad (6.123)$$

## 2.2 稳相近似法

考虑如下定义的积分:

$$I = \int_a^b g(x) e^{i\lambda f(x)} dx, \quad (6.124)$$

其中  $\lambda \rightarrow \infty$ 。可以看到相位项  $e^{i\lambda f(x)}$  在积分区间  $x \in [a, b]$  内振荡非常剧烈。假设存在一个驻点  $x_0 \in [a, b]$  满足  $f'(x_0) = 0$ , 我们可以在  $x = x_0$  附近展开  $f(x)$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \mathcal{O}((x - x_0)^3). \quad (6.125)$$

因此，积分可表示为

$$\begin{aligned}
 I &= \int_a^b g(x) e^{i\lambda[f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \mathcal{O}((x-x_0)^3)]} dx \\
 &= \int_a^b g(x) e^{i\lambda[f(x_0) + \mathcal{O}((x-x_0)^3)]} e^{\frac{i}{2}\lambda f''(x_0)(x-x_0)^2} dx \\
 &= \int_a^b u(x) e^{-\alpha(x-x_0)^2} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_C u\left(\frac{y}{\sqrt{\alpha}} + x_0\right) e^{-y^2} dy,
 \end{aligned} \tag{6.126}$$

其中定义

$$u(x) = g(x) e^{i\lambda[f(x_0) + \mathcal{O}((x-x_0)^3)]}, \quad \alpha = -\frac{i}{2}\lambda f''(x_0), \quad y = \sqrt{\alpha}(x - x_0). \tag{6.127}$$

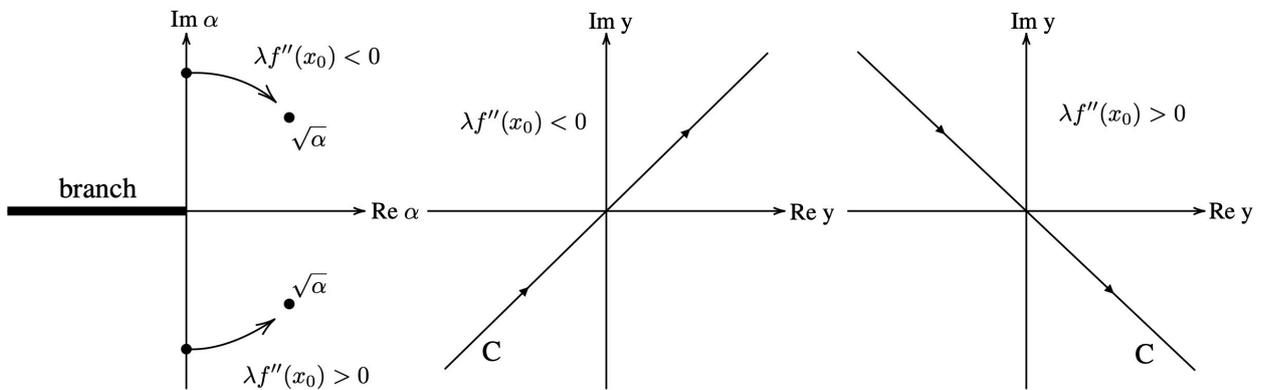


图 6.3 稳相近似积分的留数位置与积分路径。

由于  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\sqrt{\alpha}$  是一个复无穷大数。因此  $y$  的积分路径是复平面上的一条无限直线。如果我们选择负实轴作为单值分支,  $\sqrt{\alpha}$  的位置如图6.3中的左图。具体来说

1. 当  $\lambda f''(x_0) < 0$  时, 积分路径如图6.3中间图所示;
2. 当  $\lambda f''(x_0) > 0$  时, 积分路径如图6.3右图所示。

这样的积分也可以通过 Wick 旋转从复平面转到实轴来计算。此外, 我们需要处理函数  $u(x)$ , 其中  $\mathcal{O}((x - x_0)^3)$  项引入了  $\mathcal{O}(\lambda^{-1/2})$  量级的修正项, 可以忽略不计。我们从高斯积分出发

$$Z(J) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\alpha\left(\frac{1}{2}x^2 + Jx\right)\right] dx. \tag{6.128}$$

容易推导出

$$\frac{(-1)^n}{\alpha^n} \frac{d^n}{dJ^n} Z(J) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \exp\left[-\alpha\left(\frac{1}{2}x^2 + Jx\right)\right] dx. \tag{6.129}$$

因此，我们可以在  $x_0$  附近将  $u(x)$  展开为级数

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) + \mathcal{O}\left((x - x_0)^2\right) \\ &= g(x_0) e^{i\lambda f(x_0)} + g'(x_0) e^{i\lambda f(x_0)}(x - x_0) + \mathcal{O}\left((x - x_0)^2\right). \end{aligned} \tag{6.130}$$

第二等式基于  $f'(x_0) = 0$  的条件。从(6.127)式可以看出：

$$u'(x) = g'(x) e^{i\lambda[f(x_0) + \mathcal{O}((x-x_0)^3)]} + \frac{i\lambda}{3!} g(x) f'''(x_0) e^{i\lambda[f(x_0) + \mathcal{O}((x-x_0)^3)]} (x - x_0)^2 + \mathcal{O}\left((x - x_0)^3\right). \tag{6.131}$$

如果  $f'(x_0) \neq 0$ ，第一项  $\mathcal{O}\left((x - x_0)^0\right)$  将包含与  $f'(x_0)$  相关的额外项。利用(6.129)式，我们推导出(6.71)式的最终结果

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_C \left[ u(x_0) + u'(x_0) \frac{y}{\sqrt{\alpha}} + \mathcal{O}\left(\frac{y^2}{\alpha}\right) \right] e^{-y^2} dy \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} u(x_0) + \mathcal{O}\left(\alpha^{-1}\right) \\ &= \sqrt{-\frac{2\pi}{i\lambda f''(x_0)}} g(x_0) e^{i\lambda f(x_0)} \left[ 1 + \mathcal{O}\left(\lambda^{-1/2}\right) \right] \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda f''(x_0)|}} g(x_0) e^{i\lambda f(x_0) + \text{sign}[\lambda f''(x_0)]i\pi/4} + \mathcal{O}(\lambda). \end{aligned} \tag{6.132}$$

最后一个等式考虑了积分路径的选择。我们看到当  $\lambda f''(x_0) > 0$  时， $\sqrt{\alpha}$  位于第四象限，而当  $\lambda f''(x_0) < 0$  时位于第一象限。因此(6.132)式的第二行  $I = \sqrt{\pi/\alpha} \cdot u(x_0)$  表明

1. 当  $\lambda f''(x_0) > 0$  时， $I$  在第一象限；
2. 当  $\lambda f''(x_0) < 0$  时， $I$  在第四象限。

这也意味着

$$\left(-\frac{1}{i}\right)^{1/2} = e^{i\pi/4}, \quad \left(\frac{1}{i}\right)^{1/2} = e^{-i\pi/4}. \tag{6.133}$$

如果在区间  $x \in [a, b]$  内有  $n > 1$  个驻点，我们可以将  $[a, b]$  划分为  $n$  个子区间，每个子区间只包含一个驻点，最终结果就是(6.81)式。

**Annotated Bibliography:** 上述推导大多是在阅读 Futterman, Handler 与 Matzner 于 1988 年出版的著作 “Scattering from black holes” [187] 时所做的笔记。自黑洞微扰论诞生以来，这个领域也在不断发展，早期的工作中，人们大多以解析的方法，仿照量子理论中处理散射问题的分波法进行计算。最早的工作可以追溯到 Vishveshwara 1970 [188] 中对 Schwarzschild 黑洞散射引力波的计算。在 Teukolsky 方程诞生之后，很多人研究了 Kerr 黑洞对引力波的放大效应，如之

前提到的 [152], 这一现象被人们称作“超散射” (Superradiant Scattering), 详见 Brito, Cardoso 和 Pani 的综述 [189]。在 1975-1978 年间, Matzner 等人对黑洞的散射问题做了很多深入的研究 [121, 190, 191]。在沉寂了一段时间后, 直至 2000 年前后 Anderson, Dolan 等人运用之前 20 年间发展出的求解 Teukolsky 方程的数值方法, 如求解 SWSH 的连分数法 [115–117], 和求解径向方程的 MST 方法 [123, 164–166], 重新回顾了引力波散射这一问题 [192–196]。在引力波被探测到之后, 人们对散射的研究更多地集中在通过引力波的观测结合散射理论来帮助我们理解引力理论, 如研究 QNM [197], 以及引力波偏振模式带来的引力自旋霍尔效应 (gravitational spin Hall effect [198]) [199, 200]。本人亦对散射问题十分感兴趣, 因此在 2024 年秋季学期选修量子场论 (QFT) 和 2025 年春季学期旁听量子规范场论 (QGFT) 期间同时自学一些与引力波散射相关的内容, 以助于今后在相关领域开展研究工作。

## 第七章 总结

### 1. 全文总结

本文以 b-EMRI 波形计算为引，介绍了诸多前置知识与后续拓展。

在第一章中，我们介绍了引力波领域的现状。前人百年的努力造就了现在引力波天文学的欣欣向荣，蓬勃发展。然而，随着越来越多观测结果的出现，各种各样的问题也随之产生，如前面提到的黑洞质量问题：由引力波参数反演得到的双黑洞质量普遍高于原先 X 射线双星中发现的典型黑洞质量。这些新的结果进一步推动着理论的发展，促使我们重新思考恒星的形成与演化，黑洞的形成，甚至于宇宙的诞生等宏大的问题，本文所研究的 b-EMRI 模型也是在这个背景诞生的。于是一切后续的追问都变得十分自然：b-EMRI 系统有什么特征，怎样用它来解释现在遇到的理论难题？b-EMRI 的形成渠道是怎样的？b-EMRI 这样一个相对论性三体系统有哪些奇特的动力学特征？以及本文重点探讨的：b-EMRI 的引力波波形是怎样的？

为了计算 b-EMRI 系统的波形，我们需要先学习 EMRI 波形的计算方法，在此基础上加以改进。而 EMRI 波形计算的理论基础是黑洞微扰论，这便是我们研究 b-EMRI 波形的起点。并且，2021 年 Cardoso 等人的工作启示我们 [75]，b-EMRI 的波形中可能并不只有 EMRI 的成分，还存在双黑洞对超大质量黑洞 QNM 的共振激发。黑洞的 QNM 同样是黑洞微扰论的重要结果之一，并且在恒星级双黑洞并和波形的 ringdown 阶段得到了充分的验证。这促使我们不得不更加重视黑洞微扰论这一将两种引力波源联系在一起的理论，深入探究其内在联系存在的原因。

于是，在第二章中，我们回顾了黑洞微扰论的主要进展，包括我们最关心的 Teukolsky 方程和黑洞的 QNM 理论。本章的行文顺序大致按照历史发展的顺序，始于 1957 年 Regge-Wheeler 的奠基之作，接着介绍 1962 年 Newman-Penrose 引入的类空标架表述。在 NP 标架这一工具的加持下，Teukolsky 等人在 1970-1972 年间将陆续导出了 Schwarzschild 和 Kerr 时空中不同自旋场的微扰方程。然而，Schwarzschild 时空中的 Bardeen-Press-Teukolsky 方程似乎与 Regge-Wheeler-Zerilli 方程有很大不同，这促使 Chandrasekhar 和 Detweiler 研究了两者之间的变换，以及 Sasaki 和 Nakamura 将这一变换推广到 Kerr 时空。在上述理论的基础上，对黑洞 QNM 的讨论也变得自然而然。前人的努力填补了黑洞微扰论的一个又一个空缺，也为其后续的应用、拓展奠定了基础。

随后的第三章中，我们回顾了 EMRI 波形计算的基本流程。事实上，第一个 EMRI 波形计算的工作可以追溯到著名的 Peters & Mathews 1963 [201, 202]。人们对科学问题的探索往往是始于最简单的假设，然后逐渐增加系统的复杂度，从 1963 年的 Keplerian 轨道到第三章第 1 节介绍的 Kerr 时空任意类时测地线解析解，其间 40 年的发展历程并没有在本文中涉及，却反映了科学发展的基本规律。如今的 EMRI 波形计算要解决的问题已经上升到了另一个层面：即精确追踪轨道随引力辐射的演化。为了解决这一难题，以 1997 年的 MiSaTaQuWa 公式为引 [139, 140]，人们发展出了 GSF 理论，双时标展开，adiabatic 近似等诸多方法。这一看似简单的相对论性二体问题，背后蕴含着的是：广义相对论非线性的本质。近 20 年中，数值相对论领域的重大突破 [203]，二阶 GSF [204–207]，EMRI 的 post-adiabatic 演化 [48, 208]，以及对 Quadratic QNM 的计算 [209–211] 都反映着人们想要理解非线性的决心。

在对黑洞微扰论和 EMRI 波形有了深刻理解之后，我们在第四章中进入 b-EMRI 波形的计算。与此前唯一的工作 [75] 与同期进行的平行工作 [76] 相比，我们同样选择了内外轨道均为圆轨道的设定，但考虑了更加复杂的相对论性坐标变换和动力学效应。对 EMRI 波形的理解告诉我们，数据处理中最重要的应当是追踪轨道的演化，因此我们不仅计算了 waveform snapshot 还计算 adiabatic 近似下的演化波形。在第五章中，我们展示了 b-EMRI 波形计算的结果和讨论。恒星级双黑洞对超大质量黑洞 QNM 的激发效应，这不仅证实了 Cardoso 2021 [75] 中的结论，也增强我们在空间引力波探测中寻找 b-EMRI 的信心。但是，正如之前多次强调的，QNM 的激发是否会影响双黑洞内轨道运动，我们尚未可知。事实上，发出这样的问题并非坏事，这说明我们仍未完全了解 b-EMRI 的方方面面，其中仍有值得探索的问题。

在最后的第六章中，我们介绍了两个后续的研究方向：1) Teukolsky 方程远场源发散问题的正规化及 Sasaki-Nakamura 形式的应用拓展；2) Kerr 黑洞对引力波的散射。这两个方向是 b-EMRI 问题的自然拓展，也是伴随着黑洞微扰论发展的而存在的难题。通过对它们的研究，我们不仅能更加深入地理解 b-EMRI 系统这一多波段引力波源的辐射机制，也能对黑洞微扰论本身产生更加深刻理解，为未来的观测做出有意义的预测。

## 2. 本文的定位

本文的既是一篇本科毕业论文，也是本人自 2023 年 2 月进组以来所学所思所作的整合。得益于本人学习和阅读文章时使用  $\text{\LaTeX}$  做笔记的习惯，毕业论文的创作大多是对之前笔记和组会讲稿的整理。在整理的过程中，回顾从前两年多时间里的笔记，也不禁惊叹于自己已经掌握了如此多的知识。正所谓“温故而知新”，在阅读这些笔记时，我对大多数内容都有了全新的理解，但对部分不常接触的内容仍感到些许陌生。因此，结合论文创作时的体会，我

对本文有如下两点定位：

1. 作为本科毕业论文：其中第一、四、五章为本人以第一作者身份在 *Physical Review D* 上发表的文章 “Relativistic model of binary extreme-mass-ratio inspiral systems and their gravitational radiation” [155] 的中译版本，满足本科毕业论文原创性和篇幅的要求（注：本人并未参与“北京大学本科生科研”立项，该工作属于“毕业设计”的范畴）；
2. 作为黑洞微扰论与 EMRI 波形建模这一领域的第一篇中文综述：第二、三两章为本人学习黑洞微扰论和 EMRI 波形计算时的笔记整理，其创作的初衷是为了便于在未来需要时随时查阅。在本人刚刚接触 EMRI 波形计算时，“自我探索式”的学习顺序是：NP 标架 → Teuolsky 方程 → Teukolsky 方程的解法 → EMRI 波形快照的数值实现（学习 *Black Hole Perturbation Toolkit* 上的 Mathematica 代码）。显然，这样的顺序并不利于对黑洞微扰论整体的理解，因此在那之后的一年时间里，本人才通过后续不断的学习，构建出了现在第二、三章中展示的较为完整的理论框架。所以，本文的第二个定位是一篇对初学者较为友好的黑洞微扰论和 EMRI 波形的综述文章，旨在为这个领域的新人建立一个清晰且完整的图像。



## 参考文献

- [1] A. Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 354(7):769–822, January 1916.
- [2] F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson. A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 220:291–333, January 1920.
- [3] Jorge L. Cervantes-Cota, Salvador Galindo-Uribarri, and George F. Smoot. A brief history of gravitational waves. *Universe*, 2(3), 2016.
- [4] Barry C. Barish and Rainer Weiss. Ligo and the detection of gravitational waves. *Physics Today*, 52:44–50, 1999.
- [5] The LIGO Scientific Collaboration et al. Advanced ligo. *Classical and Quantum Gravity*, 32(7):074001, mar 2015.
- [6] B. P. Abbott et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116:061102, Feb 2016.
- [7] B. P. Abbott et al. Properties of the binary black hole merger gw150914. *Phys. Rev. Lett.*, 116:241102, Jun 2016.
- [8] Pau Amaro-Seoane et al. Laser Interferometer Space Antenna. *arXiv e-prints*, page arXiv:1702.00786, February 2017.
- [9] Monica Colpi et al. LISA Definition Study Report, 2 2024.
- [10] Wen-Rui Hu and Yue-Liang Wu. The Taiji Program in Space for gravitational wave physics and the nature of gravity. *National Science Review*, 4(5):685–686, 10 2017.
- [11] Jun Luo et al. TianQin: a space-borne gravitational wave detector. *Classical and Quantum Gravity*, 33(3):035010, February 2016.
- [12] En-Kun Li et al. Gravitational Wave Astronomy With TianQin, 9 2024.
- [13] Heng Xu et al. Searching for the nano-hertz stochastic gravitational wave background with the chinese pulsar timing array data release i. *Research in Astronomy and Astrophysics*, 23(7):075024, jun 2023.
- [14] Gabriella Agazie et al. The nanograv 15 yr data set: Evidence for a gravitational-wave background. *The Astrophysical Journal Letters*, 951(1):L8, jun 2023.
- [15] Daniel J. Reardon et al. Search for an isotropic gravitational-wave background with the parkes pulsar timing array. *The Astrophysical Journal Letters*, 951(1):L6, jun 2023.
- [16] EPTA Collaboration. The second data release from the European Pulsar Timing Array. I. The dataset and timing analysis. *AAP*, 678:A48, October 2023.

- [17] Pau Amaro-Seoane. Relativistic dynamics and extreme mass ratio inspirals. *Living Reviews in Relativity*, 21(1):4, May 2018.
- [18] Pau Amaro-Seoane et al. Intermediate and extreme mass-ratio inspirals—astrophysics, science applications and detection using lisa. *Classical and Quantum Gravity*, 24(17):R113, aug 2007.
- [19] Alvin J. K. Chua et al. Rapid Generation of Fully Relativistic Extreme-Mass-Ratio-Inspiral Waveform Templates for LISA Data Analysis. *Phys. Rev. Lett.*, 126(5):051102, February 2021.
- [20] Christopher Berry et al. The unique potential of extreme mass-ratio inspirals for gravitational-wave astronomy. *Bulletin of the American Astronomical Society*, 51(3):42, May 2019.
- [21] Steve Drasco and Scott A. Hughes. Gravitational wave snapshots of generic extreme mass ratio inspirals. *Phys. Rev. D.*, 73(2):024027, January 2006.
- [22] Leor Barack and Curt Cutler. LISA capture sources: Approximate waveforms, signal-to-noise ratios, and parameter estimation accuracy. *Phys. Rev. D*, 69:082005, 2004.
- [23] Alvin J. K. Chua and Jonathan R. Gair. Improved analytic extreme-mass-ratio inspiral model for scoping out eLISA data analysis. *Classical and Quantum Gravity*, 32(23):232002, December 2015.
- [24] Ryuichi Fujita and Masaru Shibata. Extreme mass ratio inspirals on the equatorial plane in the adiabatic order. *Phys. Rev. D*, 102(6):064005, 2020.
- [25] Michael L. Katz, Alvin J. K. Chua, Lorenzo Speri, Niels Warburton, and Scott A. Hughes. Fast extreme-mass-ratio-inspiral waveforms: New tools for millihertz gravitational-wave data analysis. *Phys. Rev. D*, 104(6):064047, 2021.
- [26] Scott A. Hughes, Niels Warburton, Gaurav Khanna, Alvin J. K. Chua, and Michael L. Katz. Adiabatic waveforms for extreme mass-ratio inspirals via multivoice decomposition in time and frequency. *Phys. Rev. D.*, 103(10):104014, May 2021.
- [27] Soichiro Isoyama et al. Adiabatic Waveforms from Extreme-Mass-Ratio Inspirals: An Analytical Approach. *Phys. Rev. Lett.*, 128(23):231101, June 2022.
- [28] Barry Wardell, Adam Pound, Niels Warburton, Jeremy Miller, Leanne Durkan, and Alexandre Le Tiec. Gravitational Waveforms for Compact Binaries from Second-Order Self-Force Theory. *Phys. Rev. Lett.*, 130(24):241402, 2023.
- [29] Lorenzo Speri, Michael L. Katz, Alvin J. K. Chua, Scott A. Hughes, Niels Warburton, Jonathan E. Thompson, Christian E. A. Chapman-Bird, and Jonathan R. Gair. Fast and Fourier: Extreme Mass Ratio Inspiral Waveforms in the Frequency Domain. *Front. Appl. Math. Stat.*, 9:1266739, 2023.
- [30] Stanislav Babak, Hua Fang, Jonathan R. Gair, Kostas Glampedakis, and Scott A. Hughes. ‘Kludge’ gravitational waveforms for a test-body orbiting a Kerr black hole. *Phys. Rev. D*, 75:024005, 2007. [Erratum: *Phys.Rev.D* 77, 04990 (2008)].
- [31] Zachary Nasipak. Adiabatic gravitational waveform model for compact objects undergoing quasicircular inspirals into rotating massive black holes. *Phys. Rev. D*, 109(4):044020, 2024.

- [32] Angelica Albertini, Rossella Gamba, Alessandro Nagar, and Sebastiano Bernuzzi. Effective-one-body waveforms for extreme-mass-ratio binaries: Consistency with second-order gravitational self-force quasicircular results and extension to nonprecessing spins and eccentricity. *Phys. Rev. D*, 109(4):044022, 2024.
- [33] Wen-Biao Han. Gravitational radiation from a spinning compact object around a supermassive Kerr black hole in circular orbit. *Phys. Rev. D.*, 82(8):084013, October 2010.
- [34] Gabriel Andres Piovano, Andrea Maselli, and Paolo Pani. Extreme mass ratio inspirals with spinning secondary: A detailed study of equatorial circular motion. *Phys. Rev. D.*, 102(2):024041, July 2020.
- [35] Lisa V. Drummond and Scott A. Hughes. Precisely computing bound orbits of spinning bodies around black holes. I. General framework and results for nearly equatorial orbits. *Phys. Rev. D.*, 105(12):124040, June 2022.
- [36] Lisa V. Drummond and Scott A. Hughes. Precisely computing bound orbits of spinning bodies around black holes. II. Generic orbits. *Phys. Rev. D.*, 105(12):124041, June 2022.
- [37] Gabriel Andres Piovano, Richard Brito, Andrea Maselli, and Paolo Pani. Assessing the detectability of the secondary spin in extreme mass-ratio inspirals with fully relativistic numerical waveforms. *Phys. Rev. D*, 104(12):124019, 2021.
- [38] Viktor Skoupý and Georgios Lukes-Gerakopoulos. Spinning test body orbiting around a Kerr black hole: Eccentric equatorial orbits and their asymptotic gravitational-wave fluxes. *Phys. Rev. D*, 103(10):104045, 2021.
- [39] Mostafizur Rahman and Arpan Bhattacharyya. Prospects for determining the nature of the secondaries of extreme mass-ratio inspirals using the spin-induced quadrupole deformation. *Phys. Rev. D*, 107(2):024006, 2023.
- [40] Josh Mathews, Adam Pound, and Barry Wardell. Self-force calculations with a spinning secondary. *Phys. Rev. D.*, 105(8):084031, April 2022.
- [41] Viktor Skoupý and Georgios Lukes-Gerakopoulos. Adiabatic equatorial inspirals of a spinning body into a Kerr black hole. *Phys. Rev. D*, 105(8):084033, 2022.
- [42] Lisa V. Drummond, Philip Lynch, Alexandra G. Hanselman, Devin R. Becker, and Scott A. Hughes. Extreme mass-ratio inspiral and waveforms for a spinning body into a Kerr black hole via osculating geodesics and near-identity transformations. *Phys. Rev. D*, 109(6):064030, 2024.
- [43] Viktor Skoupý, Georgios Lukes-Gerakopoulos, Lisa V. Drummond, and Scott A. Hughes. Asymptotic gravitational-wave fluxes from a spinning test body on generic orbits around a Kerr black hole. *Phys. Rev. D*, 108(4):044041, 2023.
- [44] Ollie Burke, Gabriel Andres Piovano, Niels Warburton, Philip Lynch, Lorenzo Speri, Chris Kavanagh, Barry Wardell, Adam Pound, Leanne Durkan, and Jeremy Miller. Assessing the importance of first postadiabatic terms for small-mass-ratio binaries. *Phys. Rev. D*, 109(12):124048, 2024.
- [45] Viktor Skoupý and Vojtěch Witzany. Post-newtonian expansions of extreme mass ratio inspirals of spinning bodies into schwarzschild black holes. *Phys. Rev. D*, 110:084061, Oct 2024.

- [46] Angelica Albertini, Alessandro Nagar, Josh Mathews, and Georgios Lukes-Gerakopoulos. Comparing second-order gravitational self-force and effective-one-body waveforms from inspiralling, quasicircular black hole binaries with a nonspinning primary and a spinning secondary. *Phys. Rev. D*, 110(4):044034, 2024.
- [47] Gabriel Andres Piovano, Christiana Pantelidou, Jake Mac Uilliam, and Vojtěch Witzany. Spinning particles near Kerr black holes: Orbits and gravitational-wave fluxes through the Hamilton-Jacobi formalism, 10 2024.
- [48] Josh Mathews and Adam Pound. Post-adiabatic waveform-generation framework for asymmetric precessing binaries. *arXiv e-prints*, page arXiv:2501.01413, January 2025.
- [49] Zhen Pan and Huan Yang. Formation Rate of Extreme Mass Ratio Inspirals in Active Galactic Nuclei. *Phys. Rev. D*, 103(10):103018, 2021.
- [50] Ye Jiang and Wen-Biao Han. General formalism for dirty extreme-mass-ratio inspirals. *Sci. China Phys. Mech. Astron.*, 67(7):270411, 2024.
- [51] Eric Addison, Pablo Laguna, and Shane Larson. Busting Up Binaries: Encounters Between Compact Binaries and a Supermassive Black Hole, January 2015.
- [52] Xian Chen and Wen-Biao Han. Extreme-mass-ratio inspirals produced by tidal capture of binary black holes. *Communications Physics*, 1(1):53, September 2018.
- [53] Jillian M. Bellovary et al. Migration Traps in Disks around Supermassive Black Holes. *APJL*, 819(2):L17, March 2016.
- [54] Peng Peng and Xian Chen. The last migration trap of compact objects in AGN accretion disc. *MNRAS*, 505(1):1324–1333, July 2021.
- [55] Hiromichi Tagawa, Zoltán Haiman, and Bence Kocsis. Formation and Evolution of Compact-object Binaries in AGN Disks. *APJ*, 898(1):25, July 2020.
- [56] Pau Amaro-Seoane et al. Astrophysics with the Laser Interferometer Space Antenna. *Living Reviews in Relativity*, 26(1):2, December 2023.
- [57] R. Abbott et al. Gw190521: A binary black hole merger with a total mass of  $150 M_{\odot}$ . *Phys. Rev. Lett.*, 125:101102, Sep 2020.
- [58] R. Abbott et al. GWTC-2: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo during the First Half of the Third Observing Run. *Physical Review X*, 11(2):021053, April 2021.
- [59] Charles D. Bailyn et al. The Mass Distribution of Stellar Black Holes. *APJ*, 499(1):367–374, May 1998.
- [60] Chris L. Fryer and Vassiliki Kalogera. Theoretical Black Hole Mass Distributions. *APJ*, 554(1):548–560, June 2001.
- [61] Xian Chen, Shuo Li, and Zhoujian Cao. Mass-redshift degeneracy for the gravitational-wave sources in the vicinity of supermassive black holes. *MNRAS*, 485(1):L141–L145, May 2019.
- [62] M. J. Graham et al. Candidate electromagnetic counterpart to the binary black hole merger gravitational-wave event s190521g. *Phys. Rev. Lett.*, 124:251102, Jun 2020.

- [63] R. Abbott et al. Properties and Astrophysical Implications of the  $150 M_{\odot}$  Binary Black Hole Merger GW190521. *APJL*, 900(1):L13, September 2020.
- [64] Makana Silva and Christopher Hirata. Dynamical perturbations around an extreme mass ratio inspiral near resonance. *Phys. Rev. D*, 106(8):084058, 2022.
- [65] Yohai Meiron, Bence Kocsis, and Abraham Loeb. Detecting Triple Systems with Gravitational Wave Observations. *APJ*, 834(2):200, January 2017.
- [66] Wen-Biao Han and Xian Chen. Testing general relativity using binary extreme-mass-ratio inspirals. *MNRAS*, 485(1):L29–L33, May 2019.
- [67] Lisa Randall and Zhong-Zhi Xianyu. A Direct Probe of Mass Density near Inspiring Binary Black Holes. *APJ*, 878(2):75, June 2019.
- [68] Kaze W. K. Wong, Vishal Baibhav, and Emanuele Berti. Binary radial velocity measurements with space-based gravitational-wave detectors. *MNRAS*, 488(4):5665–5670, October 2019.
- [69] Xiaoyue Zhang and Xian Chen. The appearance of a merging binary black hole very close to a spinning supermassive black hole. *MNRAS*, 521(2):2919–2929, May 2023.
- [70] Filippo Camilloni, Troels Harmark, Gianluca Grignani, Marta Orselli, and Daniele Pica. Binary mergers in strong gravity background of kerr black hole. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 531(1):1884–1904, 05 2024.
- [71] Alejandro Torres-Orjuela et al. Detecting the beaming effect of gravitational waves. *Phys. Rev. D.*, 100(6):063012, September 2019.
- [72] Han Yan, Xian Chen, and Alejandro Torres-Orjuela. Calculating the gravitational waves emitted from high-speed sources. *Phys. Rev. D.*, 107(10):103044, May 2023.
- [73] Jose María Ezquiaga et al. Phase effects from strong gravitational lensing of gravitational waves. *Phys. Rev. D.*, 103(6):064047, March 2021.
- [74] Martin Pijnenburg, Giulia Cusin, Cyril Pitrou, and Jean-Philippe Uzan. Wave optics lensing of gravitational waves: Theory and phenomenology of triple systems in the lisa band. *Phys. Rev. D*, 110:044054, Aug 2024.
- [75] Vitor Cardoso, Francisco Duque, and Gaurav Khanna. Gravitational tuning forks and hierarchical triple systems. *Phys. Rev. D*, 103:L081501, Apr 2021.
- [76] Ye Jiang et al. Distinguishability of binary extreme-mass-ratio inspirals in low frequency band. *European Physical Journal C*, 84(5):478, May 2024.
- [77] Myron Mathisson. Neue mechanik materieller systemes. *Acta Phys. Polon.*, 6:163–200, 1937.
- [78] Myron Mathisson. Republication of: New mechanics of material systems. *Gen. Rel. Grav.*, 42(4):1011–1048, 2010.
- [79] Achille Papapetrou. Spinning test particles in general relativity. 1. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 209:248–258, 1951.
- [80] W. G. Dixon. Dynamics of extended bodies in general relativity. II. Moments of the charge-current vector. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 319:509–547, 1970.

- [81] W. G. Dixon. Dynamics of extended bodies in general relativity III. Equations of motion. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, 277(1264):59–119, 1974.
- [82] Abraham I. Harte. Mechanics of extended masses in general relativity. *Class. Quant. Grav.*, 29:055012, 2012.
- [83] Kun Meng, Hongsheng Zhang, Xi-Long Fan, and Yuan Yong. Distinguish the EMRI and B-EMRI system by gravitational waves, May 2024.
- [84] Yun Fang, Rong-Zhen Guo, and Qing-Guo Huang. Tests for the existence of horizon through gravitational waves from a small binary in the vicinity of a massive object. *Physics Letters B*, 822:136654, November 2021.
- [85] Emanuele Berti, Vitor Cardoso, and Andrei O. Starinets. TOPICAL REVIEW: Quasinormal modes of black holes and black branes. *Classical and Quantum Gravity*, 26(16):163001, August 2009.
- [86] Xian Chen and Zhongfu Zhang. Binaries wandering around supermassive black holes due to gravitoelectromagnetism. *Phys. Rev. D.*, 106(10):103040, November 2022.
- [87] Filippo Camilloni, Gianluca Grignani, Troels Harmark, Roberto Oliveri, Marta Orselli, and Daniele Pica. Tidal deformations of a binary system induced by an external kerr black hole. *Phys. Rev. D*, 107:084011, Apr 2023.
- [88] Kei-ichi Maeda, Priti Gupta, and Hirotada Okawa. Chaotic von zeipel-lidov-kozai oscillations of a binary system around a rotating supermassive black hole. *Phys. Rev. D*, 108:123041, Dec 2023.
- [89] Alexander Gorbatsievich and Alexey Bobrik. The Equations of Motion of Compact Binaries in the Neighborhood of Supermassive Black Hole. *AIP Conference Proceedings*, 1205(1):87–96, 03 2010.
- [90] Robert H. Boyer and Richard W. Lindquist. Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric. *Journal of Mathematical Physics*, 8(2):265–281, February 1967.
- [91] Donato Bini, Andrea Geralico, and Robert T. Jantzen. Kerr metric, static observers and Fermi coordinates. *Classical and Quantum Gravity*, 22(22):4729–4742, November 2005.
- [92] David Klein and Peter Collas. General transformation formulas for Fermi Walker coordinates. *Classical and Quantum Gravity*, 25(14):145019, July 2008.
- [93] Tanja Hinderer and Éanna É. Flanagan. Two-timescale analysis of extreme mass ratio inspirals in kerr spacetime: Orbital motion. *Phys. Rev. D*, 78:064028, Sep 2008.
- [94] Adam Pound and Barry Wardell. Black hole perturbation theory and gravitational self-force, 1 2021.
- [95] Niayesh Afshordi et al. Waveform Modelling for the Laser Interferometer Space Antenna, 11 2023.
- [96] Tullio Regge and John A. Wheeler. Stability of a schwarzschild singularity. *Phys. Rev.*, 108:1063–1069, Nov 1957.

- [97] Ezra Newman and Roger Penrose. An Approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *J. Math. Phys.*, 3:566–578, 1962.
- [98] Roy P. Kerr. Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 11(5):237–238, September 1963.
- [99] William Kinnersley. Type D Vacuum Metrics. *Journal of Mathematical Physics*, 10(7):1195–1203, July 1969.
- [100] Frank J. Zerilli. Effective potential for even-parity regge-wheeler gravitational perturbation equations. *Phys. Rev. Lett.*, 24:737–738, Mar 1970.
- [101] Richard H. Price. Nonspherical perturbations of relativistic gravitational collapse. ii. integer-spin, zero-rest-mass fields. *Phys. Rev. D*, 5:2439–2454, May 1972.
- [102] James M. Bardeen, William H. Press, and Saul A. Teukolsky. Rotating Black Holes: Locally Nonrotating Frames, Energy Extraction, and Scalar Synchrotron Radiation. *APJ*, 178:347–370, December 1972.
- [103] Edward D. Fackerell and James R. Ipser. Weak electromagnetic fields around a rotating black hole. *Phys. Rev. D*, 5:2455–2458, May 1972.
- [104] Saul A. Teukolsky. Rotating black holes: Separable wave equations for gravitational and electromagnetic perturbations. *Phys. Rev. Lett.*, 29:1114–1118, Oct 1972.
- [105] Saul A. Teukolsky. Perturbations of a Rotating Black Hole. I. Fundamental Equations for Gravitational, Electromagnetic, and Neutrino-Field Perturbations. *APJ*, 185:635–648, October 1973.
- [106] Michele Maggiore. *Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments*. 2007.
- [107] Michele Maggiore. *Gravitational Waves: Volume 2: Astrophysics and Cosmology*. 2018.
- [108] Jolien Creighton and Warren Anderson. *Gravitational-Wave Physics and Astronomy: An Introduction to Theory, Experiment and Data Analysis*. 2011.
- [109] Rico K. L. Lo. Recipes for computing radiation from a kerr black hole using a generalized sasaki-nakamura formalism: Homogeneous solutions. *Phys. Rev. D*, 110:124070, Dec 2024.
- [110] Ezra Newman and Roger Penrose. An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients. *Journal of Mathematical Physics*, 3(3):566–578, May 1962.
- [111] S. Chandrasekhar. *The mathematical theory of black holes*. 1983.
- [112] S. A. Teukolsky. Rotating black holes - separable wave equations for gravitational and electromagnetic perturbations. *Phys. Rev. Lett.*, 29:1114–1118, 1972.
- [113] E. T. Newman and R. Penrose. Note on the bondi-metzner-sachs group. *Journal of Mathematical Physics*, 7(5):863–870, 05 1966.
- [114] Carson Flammer. *Spheroidal wave functions*. 1957.
- [115] E. W. Leaver. Solutions to a generalized spheroidal wave equation: Teukolsky’s equations in general relativity, and the two-center problem in molecular quantum mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, 27(5):1238–1265, May 1986.

- [116] Edward W. Leaver. Spectral decomposition of the perturbation response of the schwarzschild geometry. *Phys. Rev. D*, 34:384–408, Jul 1986.
- [117] E. W. Leaver. An Analytic Representation for the Quasi-Normal Modes of Kerr Black Holes. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 402(1823):285–298, December 1985.
- [118] Scott A. Hughes. Evolution of circular, nonequatorial orbits of kerr black holes due to gravitational-wave emission. *Phys. Rev. D*, 61:084004, Mar 2000.
- [119] Gregory B. Cook and Maxim Zalutskiy. Gravitational perturbations of the kerr geometry: High-accuracy study. *Phys. Rev. D*, 90:124021, Dec 2014.
- [120] Black Hole Perturbation Toolkit. (bhptoolkit.org).
- [121] P. L. Chrzanowski and C. W. Misner. Geodesic synchrotron radiation in the kerr geometry by the method of asymptotically factorized green’s functions. *Phys. Rev. D*, 10:1701–1721, Sep 1974.
- [122] Misao Sasaki and Takashi Nakamura. Gravitational Radiation from a Kerr Black Hole. I. Formulation and a Method for Numerical Analysis. *Progress of Theoretical Physics*, 67(6):1788–1809, 06 1982.
- [123] S. Mano, H. Suzuki, and E. Takasugi. Analytic Solutions of the Teukolsky Equation and Their Low Frequency Expansions. *Progress of Theoretical Physics*, 95(6):1079–1096, June 1996.
- [124] D. Batic and H. Schmid. Heun equation, Teukolsky equation, and type-D metrics. *Journal of Mathematical Physics*, 48(4):042502–042502, April 2007.
- [125] R. Fujita and H. Tagoshi. New Numerical Methods to Evaluate Homogeneous Solutions of the Teukolsky Equation. *Progress of Theoretical Physics*, 112(3):415–450, September 2004.
- [126] R. Fujita and H. Tagoshi. New Numerical Methods to Evaluate Homogeneous Solutions of the Teukolsky Equation. II —Solutions of the Continued Fraction Equation —. *Progress of Theoretical Physics*, 113(6):1165–1182, June 2005.
- [127] James M. Bardeen and William H. Press. Radiation fields in the Schwarzschild background. *Journal of Mathematical Physics*, 14(1):7–19, January 1973.
- [128] S. Chandrasekhar. On the Equations Governing the Perturbations of the Schwarzschild Black Hole. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 343(1634):289–298, May 1975.
- [129] S. Chandrasekhar and S. Detweiler. The Quasi-Normal Modes of the Schwarzschild Black Hole. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 344(1639):441–452, August 1975.
- [130] Steven L. Detweiler. Equations governing electromagnetic perturbations of the Kerr black-hole. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 349:217–230, 1976.
- [131] Steven L. Detweiler. Resonant oscillations of a rapidly rotating black hole. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 352:381–395, 1977.
- [132] S. Chandrasekhar and Steven L. Detweiler. Equations governing gravitational perturbations of the Kerr black-hole. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 350:165–174, 1976.

- [133] Scott A. Hughes. Computing radiation from Kerr black holes: Generalization of the Sasaki-Nakamura equation. *Phys. Rev. D*, 62(4):044029, August 2000.
- [134] Brandon Carter. Global structure of the kerr family of gravitational fields. *Phys. Rev.*, 174:1559–1571, Oct 1968.
- [135] Yasushi Mino. Perturbative approach to an orbital evolution around a supermassive black hole. *Phys. Rev. D*, 67:084027, Apr 2003.
- [136] W Schmidt. Celestial mechanics in kerr spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, 19(10):2743, apr 2002.
- [137] Ryuichi Fujita and Wataru Hikida. Analytical solutions of bound timelike geodesic orbits in Kerr spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, 26(13):135002, July 2009.
- [138] Eric Poisson. Gravitational radiation from infall into a black hole: Regularization of the Teukolsky equation. *Physical Review D*, 55(2):639–649, January 1997.
- [139] Yasushi Mino, Misao Sasaki, and Takahiro Tanaka. Gravitational radiation reaction to a particle motion. *Phys. Rev. D*, 55:3457–3476, Mar 1997.
- [140] Theodore C. Quinn and Robert M. Wald. Axiomatic approach to electromagnetic and gravitational radiation reaction of particles in curved spacetime. *Phys. Rev. D*, 56:3381–3394, Sep 1997.
- [141] Uchupol Ruangsri and Scott A. Hughes. Census of transient orbital resonances encountered during binary inspiral. *Phys. Rev. D*, 89:084036, Apr 2014.
- [142] Béatrice Bonga, Huan Yang, and Scott A. Hughes. Tidal resonance in extreme mass-ratio inspirals. *Phys. Rev. Lett.*, 123:101103, Sep 2019.
- [143] Lorenzo Speri and Jonathan R. Gair. Assessing the impact of transient orbital resonances. *Phys. Rev. D*, 103:124032, Jun 2021.
- [144] Maarten van de Meent. Conditions for sustained orbital resonances in extreme mass ratio inspirals. *Phys. Rev. D*, 89:084033, Apr 2014.
- [145] Christopher P. L. Berry, Robert H. Cole, Priscilla Cañizares, and Jonathan R. Gair. Importance of transient resonances in extreme-mass-ratio inspirals. *Phys. Rev. D*, 94:124042, Dec 2016.
- [146] Zachary Nasipak and Charles R. Evans. Resonant self-force effects in extreme-mass-ratio binaries: A scalar model. *Phys. Rev. D*, 104:084011, Oct 2021.
- [147] Priti Gupta, Lorenzo Speri, Béatrice Bonga, Alvin J. K. Chua, and Takahiro Tanaka. Modeling transient resonances in extreme-mass-ratio inspirals. *Phys. Rev. D*, 106:104001, Nov 2022.
- [148] Leor Barack and Adam Pound. Self-force and radiation reaction in general relativity. *Reports on Progress in Physics*, 82(1):016904, January 2019.
- [149] Maarten van de Meent. Gravitational self-force on generic bound geodesics in kerr spacetime. *Phys. Rev. D*, 97:104033, May 2018.
- [150] Yasushi Mino. From the self-force problem to the radiation reaction formula. *Classical and Quantum Gravity*, 22(15):S717, jul 2005.

- [151] Norichika Sago, Takahiro Tanaka, Wataru Hikida, Katsuhiko Ganz, and Hiroyuki Nakano. Adiabatic evolution of orbital parameters in kerr spacetime. *Progress of Theoretical Physics*, 115(5):873–907, 05 2006.
- [152] Alexei A. Starobinskil and S. M. Churilov. Amplification of electromagnetic and gravitational waves scattered by a rotating "black hole". *Sov. Phys. JETP*, 65(1):1–5, 1974.
- [153] S. A. Teukolsky and W. H. Press. Perturbations of a rotating black hole. III - Interaction of the hole with gravitational and electromagnetic radiation. *Astrophys. J.*, 193:443–461, 1974.
- [154] S. W. Hawking and J. B. Hartle. Energy and angular momentum flow into a black hole. *Communications in Mathematical Physics*, 27(4):283–290, December 1972.
- [155] Yucheng Yin, Josh Mathews, Alvin J. K. Chua, and Xian Chen. Relativistic model of binary extreme-mass-ratio inspiral systems and their gravitational radiation. *Phys. Rev. D*, 111:103007, May 2025.
- [156] W. Rindler and V. Perlick. Rotating coordinates as tools for calculating circular geodesics and gyroscopic precession. *General Relativity and Gravitation*, 22(9):1067–1081, September 1990.
- [157] L. I. Schiff. Possible new experimental test of general relativity theory. *Phys. Rev. Lett.*, 4:215–217, Mar 1960.
- [158] F. K. Manasse and C. W. Misner. Fermi Normal Coordinates and Some Basic Concepts in Differential Geometry. *Journal of Mathematical Physics*, 4(6):735–745, June 1963.
- [159] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler. *Gravitation*. 1973.
- [160] Theocharis Apostolatos, Daniel Kennefick, Amos Ori, and Eric Poisson. Gravitational radiation from a particle in circular orbit around a black hole. iii. stability of circular orbits under radiation reaction. *Phys. Rev. D*, 47:5376–5388, Jun 1993.
- [161] Daniel Kennefick and Amos Ori. Radiation reaction induced evolution of circular orbits of particles around Kerr black holes. *Phys. Rev. D*, 53:4319–4326, 1996.
- [162] Yasushi Mino, Misao Sasaki, Masaru Shibata, Hideyuki Tagoshi, and Takahiro Tanaka. Black hole perturbation: Chapter 1. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 128:1–121, 1997.
- [163] Fintan D. Ryan. Effect of gravitational radiation reaction on circular orbits around a spinning black hole. *Phys. Rev. D*, 52:R3159–R3162, 1995.
- [164] Shuhei Mano, Hisao Suzuki, and Eiichi Takasugi. Analytic Solutions of the Teukolsky Equation and Their Low Frequency Expansions. *Progress of Theoretical Physics*, 95(6):1079–1096, 06 1996.
- [165] Ryuichi Fujita and Hideyuki Tagoshi. New Numerical Methods to Evaluate Homogeneous Solutions of the Teukolsky Equation. *Progress of Theoretical Physics*, 112(3):415–450, 09 2004.
- [166] Ryuichi Fujita and Hideyuki Tagoshi. New Numerical Methods to Evaluate Homogeneous Solutions of the Teukolsky Equation. II: —Solutions of the Continued Fraction Equation —. *Progress of Theoretical Physics*, 113(6):1165–1182, 06 2005.

- [167] Misao Sasaki and Hideyuki Tagoshi. Analytic Black Hole Perturbation Approach to Gravitational Radiation. *Living Reviews in Relativity*, 6(1):6, November 2003.
- [168] William H. Press, Brian P. Flannery, and Saul A. Teukolsky. *Numerical recipes. The art of scientific computing*. 1986.
- [169] Uchupol Ruangsri and Scott A. Hughes. Census of transient orbital resonances encountered during binary inspiral. *Phys. Rev. D.*, 89(8):084036, April 2014.
- [170] Philip Lynch, Vojtěch Witzany, Maarten van de Meent, and Niels Warburton. Fast inspirals and the treatment of orbital resonances. *Classical and Quantum Gravity*, 41(22):225002, oct 2024.
- [171] Leo Stein. qnm: A Python package for calculating Kerr quasinormal modes, separation constants, and spherical-spheroidal mixing coefficients. *The Journal of Open Source Software*, 4(42):1683, October 2019.
- [172] J. G. Hills. Hyper-velocity and tidal stars from binaries disrupted by a massive Galactic black hole. *Nature*, 331(6158):687–689, February 1988.
- [173] Yoshihide Kozai. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *AJ*, 67:591–598, November 1962.
- [174] M. L. Lidov. The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies. *PLANSS*, 9(10):719–759, October 1962.
- [175] Boaz Katz, Subo Dong, and Renu Malhotra. Long-term cycling of kozai-lidov cycles: Extreme eccentricities and inclinations excited by a distant eccentric perturber. *Phys. Rev. Lett.*, 107:181101, Oct 2011.
- [176] J. M. O. Antognini. Timescales of Kozai-Lidov oscillations at quadrupole and octupole order in the test particle limit. *MNRAS*, 452(4):3610–3619, October 2015.
- [177] Manuela Campanelli and Carlos O. Lousto. Regularization of the Teukolsky equation for rotating black holes. *Physical Review D*, 56(10):6363–6369, November 1997.
- [178] Manu Srivastava and Yanbei Chen. Gravitational radiation close to a black hole horizon: Waveform regularization and the out-going echo. *Phys. Rev. D*, 104:104006, Nov 2021.
- [179] Yoshihide Tashiro and Hiroshi Ezawa. Gravitational radiation of a particle falling towards a black hole. i: The case of non-rotating black hole. *Progress of Theoretical Physics*, 66(5):1612–1626, 11 1981.
- [180] Yasufumi Kojima and Takashi Nakamura. Gravitational radiation from a particle with orbital angular momentum plunging into a kerr black hole. *Progress of Theoretical Physics*, 71(1):79–90, 01 1984.
- [181] Masaru Shibata. Gravitational waves induced by a particle orbiting around a rotating black hole: spin orbit interaction effect. *Phys. Rev. D*, 48:663–666, 1993.
- [182] Motoyuki Saijo, Kei-ichi Maeda, Masaru Shibata, and Yasushi Mino. Gravitational waves from a spinning particle plunging into a kerr black hole. *Phys. Rev. D*, 58:064005, Aug 1998.

- [183] Norichika Sago and Takahiro Tanaka. Gravitational wave echoes induced by a point mass plunging into a black hole. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2020(12):123E01, 10 2020.
- [184] Daiki Watarai. Ringdown of a postinnermost stable circular orbit of a rapidly spinning black hole: Mass ratio dependence of higher harmonic quasinormal mode excitation. *Phys. Rev. D*, 110:124029, Dec 2024.
- [185] Takashi Nakamura, Kenichi Oohara, and Yasufumi Kojima. General relativistic collapse to black holes and gravitational waves from black holes. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 90:1–218, 01 1987.
- [186] Rico K. L. Lo, Luka Vujeva, Jose María Ezquiaga, and Juno C. L. Chan. Observational signatures of highly magnified gravitational waves from compact binary coalescence. *Phys. Rev. Lett.*, 134:151401, Apr 2025.
- [187] J. A. H. Futterman, F. A. Handler, and R. A. Matzner. *SCATTERING FROM BLACK HOLES*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 5 2012.
- [188] C. V. Vishveshwara. Scattering of Gravitational Radiation by a Schwarzschild Black-hole. *Nature*, 227:936–938, 1970.
- [189] Richard Brito, Vitor Cardoso, and Paolo Pani. *Superradiance*, volume 906. 2015.
- [190] R A Matzner and M R Ryan, Jr. Scattering of gravitational radiation from vacuum black holes. *Astrophys. J., Suppl. Ser.; (United States)*, 36:3, 03 1978.
- [191] F. A. Handler and Richard A. Matzner. Gravitational wave scattering. *Phys. Rev. D*, 22:2331–2348, Nov 1980.
- [192] Nils Andersson. Scattering of massless scalar waves by a schwarzschild black hole: A phase-integral study. *Phys. Rev. D*, 52:1808–1820, Aug 1995.
- [193] Kostas Glampedakis and Nils Andersson. Scattering of scalar waves by rotating black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 18(10):1939, may 2001.
- [194] Sam R. Dolan. Scattering and Absorption of Gravitational Plane Waves by Rotating Black Holes. *Class. Quant. Grav.*, 25:235002, 2008.
- [195] Sam R. Dolan. Scattering of long-wavelength gravitational waves. *Phys. Rev. D*, 77:044004, Feb 2008.
- [196] Sam R. Dolan and Adrian C. Ottewill. Wave propagation and quasinormal mode excitation on schwarzschild spacetime. *Phys. Rev. D*, 84:104002, Nov 2011.
- [197] Koutarou Kyutoku, Hayato Motohashi, and Takahiro Tanaka. Quasinormal modes of schwarzschild black holes on the real axis. *Phys. Rev. D*, 107:044012, Feb 2023.
- [198] Marius A. Oancea, Claudio F. Paganini, Jérémie Joudioux, and Lars Andersson. An overview of the gravitational spin Hall effect. *arXiv e-prints*, page arXiv:1904.09963, April 2019.
- [199] Marius A. Oancea, Richard Stiskalek, and Miguel Zumalacárregui. Frequency- and polarization-dependent lensing of gravitational waves in strong gravitational fields. *Phys. Rev. D*, 109:124045, Jun 2024.

- [200] Kei-ichiro Kubota, Shun Arai, Hayato Motohashi, and Shinji Mukohyama. Spin wave optics for gravitational waves lensed by a kerr black hole. *Phys. Rev. D*, 110:124011, Dec 2024.
- [201] P. C. Peters and J. Mathews. Gravitational radiation from point masses in a keplerian orbit. *Phys. Rev.*, 131:435–440, Jul 1963.
- [202] P. C. Peters. Gravitational radiation and the motion of two point masses. *Phys. Rev.*, 136:B1224–B1232, Nov 1964.
- [203] Frans Pretorius. Evolution of binary black-hole spacetimes. *Phys. Rev. Lett.*, 95:121101, Sep 2005.
- [204] Eran Rosenthal. Second-order gravitational self-force. *Phys. Rev. D*, 74:084018, Oct 2006.
- [205] Adam Pound. Second-Order Gravitational Self-Force. *Phys. Rev. Lett.*, 109(5):051101, August 2012.
- [206] Adam Pound, Barry Wardell, Niels Warburton, and Jeremy Miller. Second-order self-force calculation of gravitational binding energy in compact binaries. *Phys. Rev. Lett.*, 124:021101, Jan 2020.
- [207] Yi-Xiang Wei, Jian-dong Zhang, and Jianwei Mei. Second-Order Self-Force for Eccentric Extreme-Mass Ratio Inspirals on Schwarzschild Spacetime. *arXiv e-prints*, page arXiv:2504.09640, April 2025.
- [208] Scott A. Hughes. Adiabatic and post-adiabatic approaches to extreme mass ratio inspiral. *arXiv e-prints*, page arXiv:1601.02042, January 2016.
- [209] Sizheng Ma and Huan Yang. Excitation of quadratic quasinormal modes for kerr black holes. *Phys. Rev. D*, 109:104070, May 2024.
- [210] Macarena Lagos, Tomás Andrade, Jordi Rafecas-Ventosa, and Lam Hui. Black hole spectroscopy with nonlinear quasinormal modes. *Phys. Rev. D*, 111:024018, Jan 2025.
- [211] Patrick Bourg, Rodrigo Panosso Macedo, Andrew Spiers, Benjamin Leather, Béatrice Bonga, and Adam Pound. Quadratic quasinormal mode dependence on linear mode parity. *Phys. Rev. Lett.*, 134:061401, Feb 2025.



## 致谢

白驹过隙，时光匆匆，恍惚间，就已经到了要与这园子挥手作别的时刻。回看来时的道路，虽然困难重重，坎坷无数，却也精彩纷呈，令人回味无穷。在过去的四年时光里，我从一个初入物理殿堂的懵懂青年成长为了一个真正的研究者，增长的不仅是知识，更是人生阅历和思想高度。其间，不仅有自己的勤耕不辍，更离不开身边很多人对我的鼓励和帮助。

首先要感谢的是我的家人，从始至终他们都在物质和精神上支持着我，使我能够心无旁骛地做自己喜欢的事。二十余年的人生历程中，父母所营造的轻松活跃的家庭氛围和“不强求”的教育理念，让我在遇到挫折时不乏从头再来的勇气。虽然在细节方面偶有矛盾，但在大方向上他们始终坚定不移地站在我的身后，是我最坚强的后盾。

在本科期间的科研经历中，要感谢的人太多太多。最先要感谢的是我的科研引路人，陈弦老师。从陈老师身上，我学到了一个真正的科研工作者思考问题的方式：如何提出一个好的问题，如何从盘根错节的表象下提取出真正有价值的信息，如何一步步分解一个复杂的科学问题……陈老师循序渐进的指导方式使我能够从零开始一步步了解、掌握了黑洞微扰论这门“高深的学问”，并最终走出属于自己的科研道路。感谢在我 2022 年自由探索时期给过我指导，让我找到自己真正科研兴趣的吴学兵老师和邵立晶老师，感谢他们允许我旁听组会，让我学到了很多不同的知识。此外，还要感谢东苏勃老师在天体物理讨论班上的悉心指导，让我在最忙碌的大三下学期能够做一点课题之外的研究工作，并最终反哺于自己的研究。

感谢朱良贵、Torben Frost、Verónica Vázquez-Aceves、彭朋、赵鑫淼、严涵、杨扬等组里师兄师姐对我的提点和照顾。特别感谢张中府师兄和郑浩瀚学长的前期工作和讨论，扫清了我科研中的很多障碍。感谢 2024 年在新加坡国立大学暑研期间给予我诸多照顾的 Alvin J. K. Chua 老师、Josh Mathews 博士、Soichiro Isoyama 博士和刘森昕学长。还要感谢哥本哈根大学尼尔斯玻尔研究所的 Rico K. L. Lo 博士的代码和对我后续工作的支持。

在本科生活方面，首先感谢我的室友卢宇宸、邢海洋和王一丁，感谢他们对我连续夜不归宿的包容，作为室友，我没有尽到很多自己应尽的义务。感谢满子庆、柴宇澳、王子秀吉、房奕嘉、王曦、许慎言、王昱颖、孙晓丽、曾海默等甘肃的同乡们，那些一起在招生组工作的日子和一个个为各自理想奋斗的夜晚都历历在目，仿如昨日。是朋友们的热情和鼓励让我第一次在燕园找到组织，体会到了大学生活丰富多彩的一面。感谢我的初中同学牛雅鹏，那许许多多深入哲学和社会学的探讨，使我看到了与我同样孤独者内心的挣扎，受益良多。

感谢北京大学天文系为本科生提供的学习和科研环境，让我逐渐打消了转去物理系的想

法。科维理所每周四的 colloquium 和各种各样的学术活动都使我收获颇丰。感谢理科二号楼 2801 室和郭京松、王浩宇、王梓丁、滕一鸣、罗然等在这里一起学习生活的同学们。灵感的火花在此迸发，思想的种子在此萌芽，无数的坎坷在这此度过。我至今还清晰记得 2024 年 1 月 10 日，六位同学在这里通宵复习各自考试的场景，这里烙印着我们和往届学长学姐们为前程昼夜兼程的痕迹，也将见证往后一届又一届后来者的汗水与努力。

最后，感谢自己在见识过同辈的惊人才华、认清学术圈的种种现实后，依然坚定不移地选择科研这条路。人们常说“要么不做，要做就做到最好”，但四年本科时光让我明白：真正的成长往往始于不完美。面对科研这座高山，我曾困在追求完美的执念里——总想一步登顶，却在仰望峰顶时被巨大的落差压得喘不过气。后来才懂得，重要的不是起点的高度，而是迈出第一步的勇气。当我不再苛求自己立刻达到理想状态，反而能静下心来搭建每一级台阶。那些看似微小的进步，就像夜空中的星辰，终会连成璀璨的轨迹。如今，这叠 200 页的论文正是由无数个凌晨的坚持浇筑而成。即便面临博士申请失利和国际局势的动荡，我依然保持着对科研的热忱——这份从容并非来自结果，而是源于在过程中建立的笃定。人生还有无数个四年，当未来的某天重温这些文字时，愿我依然能带着此刻这份赤诚，在自己的道路上坚定前行。毕竟，真正的成长从来不是直线上升，而是在螺旋前进中不断接近理想的自己。

以上。

2025 年 5 月 9 日于北京大学理科二号楼 2801 室

# 北京大学学位论文原创性声明和使用授权说明

## 原创性声明

本人郑重声明： 所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

论文作者签名: 胡耀程 日期: 2025 年 5 月 13 日

## 学位论文使用授权说明

本人完全了解北京大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：

- 按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；
- 学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并提供目录检索与阅览服务，在校园网上提供服务；
- 学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存论文；
- 因某种特殊原因需要延迟发布学位论文电子版，授权学校  一年 /  两年 /  三年以后，在校园网上全文发布。

(保密论文在解密后遵守此规定)

论文作者签名: 胡耀程 导师签名: 陈弦

日期: 2025 年 5 月 13 日